Informatica — 2020-07-20

Nota: Scrivete su **tutti** i fogli nome e matricola.

Esercizio 1. *Si enunci e dimostri il teorema di Knaster-Tarski.*

Esercizio 2. *Le seguenti regole definiscono induttivamente l'insieme T degli alberi binari con numeri interi nei nodi interni (regole $[T0], [T1]$) e una relazione $R \in \mathcal{P}(T \times T)$ (regole $[R0], [R1]$). Sotto, a, b, c indicano interi mentre s, d, t indicano alberi in T.*

$$\frac{}{\epsilon}[T0] \qquad \frac{s \quad d}{(s,a,d)}(a \in \mathbb{Z})[T1] \qquad \frac{}{R(\epsilon,\epsilon)}[R0] \qquad \frac{R(s,s') \quad R(d,d')}{R((s,a,d),(d',10-a,s'))}[R1]$$

1. *[20%] Si fornisca un albero t contenente esattamente 3 interi e un albero t' per cui valga $R(t,t')$ e si giustifichi la risposta esibendo una derivazione.*
2. *[20%] Si enunci il principio di induzione associato all'insieme T.*
3. *[10%] Si consideri l'enunciato seguente:*

$$\forall t, t' \in T.\ R(t,t') \implies R(t',t)$$

Si riscriva l'enunciato in modo logicamente equivalente nella forma

$$\forall t \in T.\ p(t)$$

per un qualche predicato p.

4. *[50%] Si concluda la dimostrazione dell'enunciato visto sopra usando il principio di induzione* <u>*associato a T*</u>.

Soluzione (bozza).
Parte 1.
Una possibile soluzione è:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{R(\epsilon,\epsilon)} \quad \dfrac{}{R(\epsilon,\epsilon)}}{R((\epsilon,2,\epsilon),(\epsilon,8,\epsilon))} \qquad \dfrac{\dfrac{}{R(\epsilon,\epsilon)} \quad \dfrac{}{R(\epsilon,\epsilon)}}{R((\epsilon,4,\epsilon),(\epsilon,6,\epsilon))}}{R(((\epsilon,2,\epsilon),7,(\epsilon,4,\epsilon)),((\epsilon,6,\epsilon),3,(\epsilon,8,\epsilon)))}$$

Parte 2.
Sia $p(t)$ un predicato su $t \in T$. Per dimostrare che vale $p(t)$ per ogni $t \in T$ basta dimostrare che:

$$\begin{array}{ll} R0) & p(\epsilon,) \\ R1) & \forall s,d \in T, a \in \mathbb{Z}.\ p(s) \land p(s) \implies p((s,a,d)) \end{array}$$

Parte 3.
Basta definire

$$p(t): \qquad \forall t' \in T.\ R(t,t') \implies R(t',t)$$

Parte 4.
Caso R0.
Dobbiamo dimostrare $p(\epsilon)$ e cioè:

$$\forall t' \in T.\ R(\epsilon,t') \implies R(t',\epsilon)$$

Assumiamo $IP1 : R(\epsilon,t')$ e dimostriamo la tesi $R(t',\epsilon)$. Invertendo $IP1$ notiamo che può essere generata solo dalla regola $R0$, e quindi $t' = \epsilon$. Questo rende la tesi uguale all'ipotesi.

Caso R1. Assumiamo come ipotesi induttive $IP1 : p(s)$ e $IP2 : p(d)$, cioè:

$$IP1 : \forall t'_1 \in T.\ R(s, t'_1) \implies R(t'_1, s)$$
$$IP2 : \forall t'_2 \in T.\ R(d, t'_2) \implies R(t'_2, d)$$

Dimostriamo la tesi $p((s, a, d))$ che è:

$$\forall t' \in T.\ R((s, a, d), t') \implies R(t', (s, a, d))$$

Assumiamo quindi $IP3 : R((s, a, d), t')$ e dimostriamo la nuova tesi $R(t', (s, a, d))$.

Invertendo $IP3$ notiamo che può essere generata solo dalla regola $R1$, e quindi $t' = (d', 10 - a, s')$ per qualche d', d' tali che $IP4 : R(s, s')$ e $IP5 : R(d, d')$.

Usando $IP1$ (scegliendo $t'_1 = s'$) e $IP4$ ricaviamo $IP6 : R(s', s)$.

Usando $IP2$ (scegliendo $t'_2 = d'$) e $IP5$ ricaviamo $IP7 : R(d', d)$.

Da $IP6$ e $IP7$ applicando la regola $R1$ otteniamo $R((d', 10-a, s'), (s, 10-(10-a), d))$ che diventa uguale la tesi dopo avere semplificato $10 - (10 - a) = a$.

$\square$

Esercizio 3. *Si consideri la tripla di Hoare*

$$\{y > 5\}\ x := y; x := x + 1\ \{x > 6\}$$

1. *Si esprima la validità della tripla di sopra con una formula logica, ottenuta applicando direttamente la definizione di* validità *di una tripla di Hoare.*
2. *La formula logica così ottenuta usa nelle ipotesi la relazione semantica* $(\rightarrow_b)$ *in un certo modo. Si applichi il principio di inversione su tale ipotesi, ricostruendo in tal modo tutte le derivazioni possibili per tale ipotesi.*
3. *In modo informale, ma preciso, si studino le derivazioni ottenute e si giustifichi così la verità della formula logica ottenuta, e quindi la validità della tripla.*

Soluzione (bozza).
Parte 1.

$$\forall \sigma, \sigma' \in State.\ \sigma \models y > 5 \wedge \langle x := y; x := x + 1, \sigma\rangle \rightarrow_b \sigma' \implies \sigma' \models x > 6$$

Parte 2.
L'unica derivazione possibile per $\langle x := y; x := x + 1, \sigma\rangle \rightarrow_b \sigma'$ è:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\langle y, \sigma\rangle \rightarrow_e \sigma(y)}}{\langle x := y, \sigma\rangle \rightarrow_b \sigma[x \mapsto \sigma(y)]}[Let] \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\langle x + 1, \sigma[x \mapsto \sigma(y)]\rangle \rightarrow_e \sigma(y) + 1}}{\langle x := x + 1, \sigma[x \mapsto \sigma(y)]\rangle \rightarrow_b \sigma[x \mapsto \sigma(y) + 1]}[Let]}{\langle x := y; x := x + 1, \sigma\rangle \rightarrow_b \sigma[x \mapsto \sigma(y) + 1]}[Comp]$$

Parte 3.
L'ipotesi $\sigma \models y > 5$ è equivalente a $\sigma(y) > 5$. Nella derivazione si osserva che x viene modificato al valore $\sigma(y)$ dopo il primo assegnamento, e poi a $\sigma(y) + 1$ dopo il secondo assegnamento, che è il valore finale di x.

Osserviamo anche che lo stato finale σ' deve essere necessariamente $\sigma[x \mapsto \sigma(y) + 1]$.

Pertanto, la tesi $\sigma' \models x > 6$ è equivalente a $\sigma[x \mapsto \sigma(y)+1](x) > 6$ e cioè a $\sigma(y)+1 > 6$. Questo deriva immediatamente dall'ipotesi $\sigma(y) > 5$.

$\square$

Nome ______________________________________ Matricola ______________

Esercizio 4. *Si dimostri formalmente la validità della tripla di Hoare seguente riempiendo le linee sottostanti con opportune asserzioni.*

{vero}

____

$x := a * a;$

____

$y := 5 * x;$

____

while $x + y > 0$ do

____

____

$x := x - 1;$

____

$y := y - 5$

____

$\{x = y\}$

Giustificare qui sotto eventuali usi della regola $PrePost$.

____

____

____

____

____

____

____

Soluzione (bozza).

$$
\begin{array}{l}
\{\mathsf{vero}\}\ (1) \\
\{5a^2 = 5a^2 \wedge a^2 \geq 0 \wedge 5a^2 \geq 0\} \\
x := a * a; \\
\{INV : 5x = 5x \wedge x \geq 0 \wedge 5x \geq 0\} \\
y := 5 * x; \\
\{INV : y = 5x \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\} \\
\mathsf{while}\ x + y > 0\ \mathsf{do} \\
\qquad \{INV \wedge x + y > 0\}\ (2) \\
\qquad \{y - 5 = 5(x-1) \wedge x - 1 \geq 0 \wedge y - 5 \geq 0\} \\
\qquad x := x - 1; \\
\qquad \{y - 5 = 5x \wedge x \geq 0 \wedge y - 5 \geq 0\} \\
\qquad y := y - 5 \\
\{INV \wedge \neg(x + y > 0)\}\ (3) \\
\{x = y\}
\end{array}
$$

Per le PrePost:

1) banale aritmetica.

2) Siccome per ipotesi x e y sono ≥ 0 ma la somma è positiva, almeno uno dei due deve essere positivo. Di qui, siccome per ipotesi $y = 5x$, si ricava che entrambi sono positivi.

Da questo, siccome sono interi, ricaviamo $x \geq 1$ e quindi la tesi $x - 1 \geq 0$. Di qui, si ha $5x - 5 \geq 0$ per cui visto che $y = 5x$ si ha la tesi $y - 5 \geq 0$.

Infine, la tesi $y - 5 = 5(x-1)$ deriva dall'ipotesi $y = 5x$ dopo semplici semplificazioni.

3) Per ipotesi x e y sono ≥ 0 e la somma è ≤ 0. Questo è possibile solo se $x =$ e $y = 0$ da cui la tesi $x = y$.

Nota finale: nell'invariante si poteva omettere una delle due condizioni $x \geq 0$ o $y \geq 0$, visto che sono equivalenti sotto l'ipotesi $y = 5x$.

□