# Informatica — 2016-02-08

**Nota:** Scrivete su **tutti** i fogli nome e matricola.

**Esercizio 1.** *Si dimostri che se $f : \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(U)$ è continua (secondo Scott), allora $f$ è anche monotona.*

**Esercizio 2.** *Si stabilisca quali delle seguenti funzioni $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ sono continue secondo Scott, giustificando la risposta.*

$$f(X) = \mathbb{N} \setminus X \qquad g(X) = \begin{cases} X & \textit{se } X \textit{ è finito} \\ X \cup \{5\} & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

$$h(X) = \begin{cases} X & \textit{se } 5 \notin X \\ X \cup \{5\} & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

**Soluzione (bozza).**

**Parte $f$.** Si ha $2 \in f(\{1\})$ ma $2 \notin f(\{1,2\})$, quindi $f(\{1\}) \not\subseteq f(\{1,2\})$, da cui $f$ non è monotona, e di conseguenza nemmeno continua.

**Parte $g$.** Sia $X_i = \{n \in \mathbb{N} \mid 10 \leq n \leq 10 + i\}$. Abbiamo che

$$g\Big(\bigcup_i X_i\Big) = g(\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 10\}) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 10\} \cup \{5\}$$

e che, siccome $X_i$ è finito per ogni $i$,

$$\bigcup_i g(X_i) = \bigcup_i X_i = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 10\}$$

Siccome i due insiemi sono diversi, $g$ non è continua.

**Parte $h$.** Quando $5 \in X$ si ha $X \cup \{5\} = X$. Quindi, per ogni $X$, si ha che $h(X) = X$. Di qui, la continuità segue banalmente.

$\square$

**Esercizio 3.** *Data una variable $x \in Var$, definiamo l'insieme $Com^x \subseteq Com$ dei "comandi che non assegnano ad $x$" in modo induttivo tramite le seguenti regole*

$$\frac{}{\mathsf{skip}}[C0] \qquad \frac{x \neq y}{y := e}[C1] \qquad \frac{c_1 \quad c_2}{c_1; c_2}[C2]$$

$$\frac{c_1 \quad c_2}{\mathsf{if}\ e \neq 0\ \mathsf{then}\ c_1\ \mathsf{else}\ c_2}[C3] \qquad \frac{c}{\mathsf{while}\ e \neq 0\ \mathsf{do}\ c}[C4]$$

1. *[20%] Si dica quali condizioni vanno verificate per potere dimostrare $\forall c \in Com^x.\ p(c)$ per induzione su $Com^x$, dove $p$ è una proprietà sui comandi.*

2. *[50%] Fissato $A$ un arbitrario insieme di interi, si dimostri che*

$$\forall c \in Com^x.\ \vdash \{x \in A\}\ c\ \{x \in A\}$$

*procedendo per induzione su $Com^x$. Si svolgano i casi $[C0], [C1], [C2]$.*

3. *[20%] Si svolgano i rimanenti casi $[C3], [C4]$.*

4. *[10%] Si trovi infine un comando $c \in Com \setminus Com^x$ che soddisfi comunque $\vdash \{x \in A\}\ c\ \{x \in A\}$. Si dimostri tale tripla di Hoare.*

**Soluzione (bozza).**

**Parte 1** Vanno verificate:

$$\begin{array}{ll} 0) & p(\mathsf{skip}) \\ 1) & x \neq y \implies p(y := e) \\ 2) & p(c_1) \wedge p(c_2) \implies p(c_1; c_2) \\ 3) & p(c_1) \wedge p(c_2) \implies p(\mathsf{if}\ e \neq 0\ \mathsf{then}\ c_1\ \mathsf{else}\ c_2) \\ 4) & p(c) \implies p(\mathsf{while}\ e \neq 0\ \mathsf{do}\ c) \end{array}$$

**Parte 2** Usiamo il principio di sopra dove $p(c) = (\vdash \{x \in A\}\ c\ \{x \in A\})$.

**Caso [C0]** Senza ipotesi induttive, dobbiamo dimostrare che

$$\vdash \{x \in A\}\ \mathsf{skip}\ \{x \in A\}$$

ma questo è immediato dalla regola $[Skip]$ delle triple di Hoare.

**Caso [C1]** Senza ipotesi induttive, e con la condizione a lato $x \neq y$ dobbiamo dimostrare che

$$\vdash \{x \in A\}\ y := e\ \{x \in A\}$$

La regola delle triple dice che

$$\vdash \{x \in A\{e/y\}\}\ y := e\ \{x \in A\}$$

Visto che $x \neq y$, la sostituzione non ha effetto, e quindi la precondizione di sopra è proprio $\{x \in A\}$, come si desiderava.

**Caso [C2]** Abbiamo due ipotesi induttive:

$$\vdash \{x \in A\}\ c_1\ \{x \in A\} \qquad \vdash \{x \in A\}\ c_2\ \{x \in A\}$$

e dobbiamo fare vedere che

$$\vdash \{x \in A\}\ c_1; c_2\ \{x \in A\}$$

La tesi deriva direttamente dalla regola $[Comp]$ delle triple, applicata alle due ipotesi induttive. Nella notazione usuale, la derivazione è scritta come

$$\begin{array}{l} \{x \in A\} \\ c_1 \\ \{x \in A\} \\ c_2 \\ \{x \in A\} \end{array}$$

**Parte 3** **Caso [C3]** Abbiamo due ipotesi induttive:

$$(1)\ \vdash \{x \in A\}\ c_1\ \{x \in A\} \qquad (2)\ \vdash \{x \in A\}\ c_2\ \{x \in A\}$$

e dobbiamo fare vedere che

$$\vdash \{x \in A\}\ \textsf{if}\ e \neq 0\ \textsf{then}\ c_1\ \textsf{else}\ c_2\ \{x \in A\}$$

La deriviamo come segue:

$$\begin{array}{lll}
\{x \in A\} & & \\
\textsf{if}\ e \neq 0\ \textsf{then} & & \\
\quad \{x \in A \wedge e \neq 0\} & & \\
\quad \{x \in A\} & & \text{banale PrePost} \\
\quad c_1 & & \\
\quad \{x \in A\} & & \text{per l'ipotesi (1)} \\
\textsf{else} & & \\
\quad \{x \in A \wedge \neg(e \neq 0)\} & & \\
\quad \{x \in A\} & & \text{banale PrePost} \\
\quad c_2 & & \\
\quad \{x \in A\} & & \text{per l'ipotesi (2)} \\
\{x \in A\} & &
\end{array}$$

**Caso [C4]** Abbiamo una ipotesi induttive:

$$(1)\ \vdash \{x \in A\}\ c\ \{x \in A\}$$

e dobbiamo fare vedere che

$$\vdash \{x \in A\}\ \textsf{while}\ e \neq 0\ \textsf{do}\ c\ \{x \in A\}$$

La deriviamo come segue:

$$\begin{array}{lll}
\{INV : x \in A\} & & \\
\textsf{while}\ e \neq 0\ \textsf{do} & & \\
\quad \{x \in A \wedge e \neq 0\} & & \\
\quad \{x \in A\} & & \text{banale PrePost} \\
\quad c & & \\
\quad \{x \in A\} & & \text{per l'ipotesi (1)} \\
\{x \in A \wedge \neg(e \neq 0)\} & & \\
\{x \in A\} & & \text{banale PrePost}
\end{array}$$

$\square$

Nome ______________________________ Matricola ____________

**Esercizio 4.** *Si dimostri formalmente la validità della tripla di Hoare seguente riempiendo le linee sottostanti con opportune asserzioni.*

$\{N \geq 0\}$

______________________________

$n := 0;$

______________________________

$s := 0;$

______________________________

while $n < N$ do

______________________________

______________________________

$n := n + 1;$

______________________________

$s := s + n * n;$

______________________________

$\{s = N \cdot (N + 1) \cdot (2 \cdot N + 1)/6\}$

Giustificare qui sotto eventuali usi della regola *PrePost*.

______________________________

______________________________

______________________________

______________________________

______________________________

______________________________

______________________________

______________________________

______________________________

______________________________

**Soluzione (bozza).**

$\{N \geq 0\}$
$\{0 = 0 \cdot (0+1) \cdot (2 \cdot 0 + 1)/6 \wedge 0 \leq N\}$ (1)
$n := 0;$
$\{0 = n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n + 1)/6 \wedge n \leq N\}$
$s := 0;$
$\{INV : s = n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n + 1)/6 \wedge n \leq N\}$
while $n < N$ do
  $\{INV \wedge n < N\}$
  $\{s + (n+1)^2 = (n+1) \cdot (n+1+1) \cdot (2 \cdot (n+1) + 1)/6 \wedge n+1 \leq N\}$ (2)
  $n := n + 1;$
  $\{s + n^2 = n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n + 1)/6 \wedge n \leq N\}$
  $s := s + n * n;$
$\{INV \wedge \neg(n < N)\}$
$\{s = N \cdot (N+1) \cdot (2 \cdot N + 1)/6\}$ (3)

Per le PrePost:

1) Banale calcolo. $0 \leq N$ è un'ipotesi.

2) L'ipotesi $n < N$ assicura $n + 1 \leq N$, visto che sono interi. L'altra equazione si verifica rimpiazzando $s$ con il suo valore da ipotesi $n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n + 1)/6$ e semplificando.

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n + 1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (2 \cdot n + 3)}{6}$$

3) Dalle ipotesi segue che $n = N$, e da quello la tesi. $\square$