Algebra di Boole

Andrea Passerini
passerini@dsi.unifi.it

Conoscenze informatiche e relazionali
Corso di laurea in Scienze dell’Ingegneria Edile

Variabili logiche

- Una variabile logica (o *booleana*) è una variable che può assumere solo uno di due valori:
  - *True* (*vero* identificato con *1*)
  - *False* (*falso* identificato con *0*)

Connettivi logici

- Le variabili logiche possono essere combinate per mezzo di operatori detti *connettivi logici*. I principali sono:
  - Congiunzione (AND o $\wedge$)
  - Disgiunzione (OR o $\vee$)
  - Negazione (NOT o $\neg$)
- Combinando variabili logiche mediante i connettivi si ottengono le *espressioni logiche*.

Tabelle di verità

- Una espressione logica può essere definita in maniera esaustiva tramite la sua *tabella di verità*, che riporta il suo valore per ogni possibile configurazione delle variabili in essa contenute.

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	$\neg A$
0	1
1	0

Sono espressioni logiche

- Le costanti True e False.
- Una variabile booleana.
- Una espressione tra parentesi e.g. $(A \vee B)$.
- La combinazione di espressioni mediante connettivi logici e.g. $\neg(A \vee B)$.

Precedenza

- NOT ha precedenza più alta di AND e OR

$$\neg A \wedge \neg B \vee \neg C \text{ equivale a } (\neg A) \wedge (\neg B) \vee (\neg C)$$

- AND ha precedenza più alta di OR

$$A \wedge B \vee C \text{ equivale a } (A \wedge B) \vee C$$

Calcolare la tabella di verità delle espressioni

- Si utilizzano le tabelle di verità dei connettivi logici rispettando le precedenze.
- Esempio: $(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$

A	B	$\neg B$	$\neg A$	$A \wedge \neg B$	$B \wedge \neg A$	$(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0

- Tale espressione viene abbreviata con un connettivo logico ulteriore, l'*OR esclusivo* (XOR o EXOR o $\oplus$), ossia $A \oplus B$.

Notazione

- La notazione $\vee$,$\wedge$,$\neg$ è standard nella logica ma pesante per scrivere espressioni.
- Per enfatizzare la somiglianza con le corrispondenti operazioni dell'algebra tra numeri reali è comune indicare i connettivi anche come:
  - AND: $\cdot$
  - OR: +
  - NOT: soprasegnatura (sbarra orizzontale sopra la variabile)
- E.g. $\neg A \wedge (B \vee C)$ si può scrivere $\overline{A} \cdot (B+C)$

Eguaglianza

- Due espressioni sono uguali (o logicamente equivalenti) se il loro valore di verità è identico per ogni assegnazione delle variabili.
- L'eguaglianza può essere verificata mediante le tabelle di verità.
- Esempio: $X + X \cdot Y = X$

X	Y	$X \cdot Y$	$X + X \cdot Y$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Assiomi di un'Algebra di Boole

1. Proprietà commutativa

$$X + Y = Y + X$$
$$X \cdot Y = Y \cdot X$$

2. Proprietà distributiva

$$X \cdot (Y + Z) = (X \cdot Y) + (X \cdot Z)$$
$$X + (Y \cdot Z) = (X + Y) \cdot (X + Z)$$

Assiomi di un'Algebra di Boole

3. Elemento neutro

$$X + 0 = X$$

$$X \cdot 1 = X$$

$$0 \neq 1$$

4. Complementarietà degli inversi

$$X + \overline{X} = 1$$

$$X \cdot \overline{X} = 0$$

Algebra di Boole

Definizione

- Un insieme non vuoto V contenente almeno i due elementi 0 ed 1 è un'algebra di Boole se tra i suoi elementi sono definite:
  - un'operazione binaria (da $V \times V \rightarrow V$) *somma* (indicata con +)
  - un'operazione binaria (da $V \times V \rightarrow V$) *prodotto* (indicata con $\cdot$)
  - un'operazione unaria (da $V \rightarrow V$) (indicata con la soprassegnatura)
- che soddisfano gli assiomi 1-4.

Nota

Si può facilmente verificare che l'insieme $V=\{0,1\}$ con gli operatori AND,OR,NOT che abbiamo definito è un'Algebra di

Funzioni booleane

- Una funzione booleana di n variabili booleane $X_1, \ldots, X_n$ è un'applicazione

$$f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$$

- A differenza di quanto accade ad esempio per le funzioni reali di variabile reale, il numero di funzioni booleane in n variabili è finito.

Rappresentazione tabellare (n=4)

X_1	X_2	X_3	X_4	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

- La rappresentazione definisce il valore della funzione per ogni possibile configurazione dei suoi argomenti
- Il numero di funzioni booleane distinte corrisponde alle possibili configurazioni che si possono assegnare all'ultima colonna.
- Con 4 variabili si hanno 2^4=16 possibili configurazioni degli argomenti. Per ognuna di queste configurazioni la funzione può assumere due valori $\{0,1\}$. Quindi le funzioni distinte sono 2^{16} ossia 2^{2^n}

Ricavare la Forma Algebrica dalla Tavola di Verità

- Si considerano solo le righe per le quali la variabile di uscita è vera
  - la forma algebrica rappresenta le condizioni che rendono vera l'uscita
  - la funzione sarà falsa in tutti gli altri casi
- Si mettono in AND tutte le variabili di ingresso di una riga, negando quelle che assumono valore falso.
- Si mettono in OR le espressioni trovate per le righe considerate.

Esempio

- Data la seguente tavola di verità

X_1	X_2	X_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Esempio

X_1	X_2	X_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

- Si considerano solo le righe che rendono vera la variabile di uscita

Esempio

X_1	X_2	X_3	f
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1

- Si mettono in AND tutte le variabili di ingresso di ciascuna riga, negando quelle che assumono valore falso.

$$\overline{X_1} \cdot X_2 \cdot \overline{X_3}$$
$$\overline{X_1} \cdot X_2 \cdot X_3$$
$$X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot \overline{X_3}$$

Esempio

- La variabile di uscita è vera quando almeno una delle tre condizioni trovate è vera
- Si pongono quindi in OR le tre condizioni per trovate la forma algebrica finale

$$\overline{X_1} \cdot X_2 \cdot \overline{X_3} + \overline{X_1} \cdot X_2 \cdot X_3 + X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot \overline{X_3}$$

Esempio

- Data la seguente tavola di verità

X_1	X_2	X_3	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Esempio

X_1	X_2	X_3	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

- Si considerano solo le righe che rendono vera la variabile di uscita

Esempio

X_1	X_2	X_3	f
0	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

- Si mettono in AND tutte le variabili di ingresso di ciascuna riga, negando quelle che assumono valore falso.

$$\overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot \overline{X_3}$$

$$X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot X_3$$

$$X_1 \cdot X_2 \cdot \overline{X_3}$$

$$X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$$

Esempio

- La variabile di uscita è vera quando almeno una delle quattro condizioni trovate è vera
- Si pongono quindi in OR le quattro condizioni per trovate la forma algebrica finale

$$\overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} + X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot X_3 + X_1 \cdot X_2 \cdot \overline{X_3} + X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$$

Riduzione delle funzioni booleane

- Una fuzione booleana f può essere *ridotta* in una funzione f' se f' è equivalente ad f e la sua forma algebrica contiene meno operatori e variabili.
- La riduzione di funzioni booleane è estremamente importante per garantire la massima efficienza possibile nel calcolarne i valori.

Metodi di riduzione

- Manipolazione delle forme algebriche tramite assiomi dell'Algebra di Boole, con l'aggiunta di teoremi e proprietà quali:
  - Teoremi di De Morgan

$$\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$
$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

  - Idempotenza

$$X + X = X$$
$$X \cdot X = X$$

  - Limite superiore

$$A + 1 = 1$$
$$A \cdot 1 = A$$

Esempi

- Semplificare la seguente espressione:

$$\overline{X}Y + XY + X\overline{Y}$$

- Dato che $Z + Z = Z$ (idempotenza) possiamo aggiungere uno dei termini presenti nell'espressione senza cambiarla
- Aggiungendo XY si ottiene:

$$\overline{X}Y + XY + X\overline{Y} + XY$$

- Utilizzando la proprietà associativa dell'operatore OR

$$(\overline{X} + X)Y + X(\overline{Y} + Y)$$

- E infine dato che $Z + \overline{Z} = 1$ (complementarietà degli inversi) e $1 \cdot Z = Z$ (limite superiore)

$$1 \cdot Y + X \cdot 1 = X + Y$$

Esempi

- Proprietà di assorbimento

$$
\begin{aligned}
A + A \cdot B &= A \cdot 1 + A \cdot B && \text{(limite superiore)} \\
&= A \cdot (1 + B) && \text{(proprietà distributiva)} \\
&= A \cdot 1 && \text{(limite superiore)} \\
&= A && \text{(limite superiore)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A \cdot (A + B) &= A \cdot A + A \cdot B && \text{(proprietà distributiva)} \\
&= A + A \cdot B && \text{(idempotenza)} \\
&= A && \text{(proprietà di assorbimento)}
\end{aligned}
$$

Altri metodi di riduzione

- Condensazione delle tabelle di verità mediante individuazione di condizioni di non influenza e fusione di righe.
- Impiego delle *mappe di Karnaugh*.