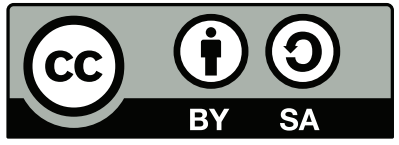
Algoritmi e Strutture Dati

Programmazione dinamica – Parte 2

Alberto Montresor

Università di Trento

2024/03/05



Sommario

1. Zaino con memoization
2. Variante dello zaino, senza limiti
3. Sottosequenza comune massimale

Complessità computazionale

Qual è la complessità della funzione knapsack()?

$$T(n) = O(nC)$$

È un algoritmo polinomiale?

No, è un algoritmo pseudo-polinomiale, perchè sono necessari $k = \lceil \log C \rceil$ bit per rappresentare C e quindi la complessità è:

$$T(n) = O(n2^k)$$

Zaino ricorsivo

Qual è la complessità della funzione knapsack() ricorsiva?

```
int knapsack(int[] w, int[] p, int n, int C)
return knapsackRec(w, p, n, C)
```

```
int knapsackRec(int[] w, int[] p, int i, int c)
if c < 0 then
    return −∞
else if i == 0 or c == 0 then
    return 0
else
    int nottaken = knapsackRec(w, p, i − 1, c)
    int taken = knapsackRec(w, p, i − 1, c − w[i]) + p[i]
    return max(nottaken, taken)
```

Complessità computazionale

Qual è la complessità della funzione knapsack() ricorsiva?

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n \leq 1 \\ 2T(n-1)+1 & n > 1 \end{cases}$$

$$T(n) = O(2^n)$$

È un algoritmo polinomiale?

Ovviamente no!

Possiamo fare meglio di così?

No, secondo l'opinione di quasi tutti gli informatici del mondo.

Osservazione

Osservazione

Non tutti gli elementi della matrice sono necessari alla risoluzione del nostro problema.

```
w = [ 4, 2, 3, 4]
p = [10, 7, 8, 6]        C = 9
```

	c									
i	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	0	**0**
1	**0**	0	**0**	**0**	**10**	**10**	**10**	**10**	10	**10**
2	0	0	**7**	7	10	**10**	**17**	17	17	**17**
3	0	0	7	8	10	**15**	17	18	18	**25**
4	0	0	7	8	10	15	17	18	18	**25**

Memoization

Memoization (annotazione)

Tecnica che fonde l'approccio di memorizzazione della programmazione dinamica con l'approccio top-down di divide-et-impera

- Si crea una tabella DP, inizializzata con un valore speciale che indica che un sottoproblema non è ancora stato risolto
- Quando si deve risolvere un sottoproblema, si controlla nella tabella se è già stato risolto:
  SI : si usa il risultato della tabella
  NO : si calcola il risultato e lo si memorizza
- In tal modo, ogni sottoproblema viene calcolato una sola volta e memorizzato come nella versione bottom-up

Zaino con memoization

int knapsack(**int**[ ] w, **int**[ ] p, **int** n, **int** C)

DP = **new int**$[1 \ldots n][1 \ldots C] = \{-1\}$
return knapsackRec(w, p, n, C, DP)

- La tabella viene inizializzata esternamente, nella funzione wrapper
- Il valore -1 è scelto per indicare una cella non ancora calcolata

Zaino con memoization

```
int knapsackRec(int[] w, int[] p, int i, int c, int[][] DP)
if c < 0 then
    return −∞
else if i == 0 or c == 0 then
    return 0
else
    if DP[i][c] < 0 then
        int nottaken = knapsackRec(w, p, i − 1, c, DP)
        int taken = knapsackRec(w, p, i − 1, c − w[i], DP) + p[i]
        DP[i][c] = max(nottaken, taken)
    return DP[i][c]
```

Zaino con memoization

```
def knapsackRec(w, p, i, c, DP):
  if c < 0:
    return -math.inf
  elif i == 0 or c == 0:
    return 0
  else:
    if DP[i][c] < 0:
      nottaken = knapsackRec(w, p, i-1, c, DP)
      taken = knapsackRec(w, p, i-1, c-w[i-1], DP) + p[i-1]
      DP[i][c] = max(nottaken, taken)
    return DP[i][c]

def knapsack(w,p,C):
  n = len(w)
  DP = [[-1]*(C+1) for i in range(n+1)]
  return knapsackRec(w,p,n,C,DP)
```

Esempio

```
w = [ 4, 2, 3, 4]
p = [10, 7, 8, 6]
C = 9
```

	c									
i	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0										
1		-1	**0**	**0**	**10**	**10**	**10**	**10**	-1	**10**
2		-1	**7**	-1	-1	**10**	**17**	-1	-1	**17**
3		-1	-1	-1	-1	**15**	-1	-1	-1	**25**
4		-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	**25**

Dizionario vs tabella

Inizializzazione tabella

- Il costo di inizializzazione è pari a $O(nC)$
- Applicata in questo modo, non c'è alcun vantaggio nell'utilizzare la tecnica di memoization
- Permette tuttavia di tradurre in fretta le espressioni ricorsive

Dizionario vs tabella

Inizializzazione tabella

- Il costo di inizializzazione è pari a $O(nC)$
- Applicata in questo modo, non c'è alcun vantaggio nell'utilizzare la tecnica di memoization
- Permette tuttavia di tradurre in fretta le espressioni ricorsive

Utilizzo di un dizionario (hash table)

- Invece di utilizzare una tabella, si utilizza un dizionario
- Non è necessario fare inizializzazione
- Il costo di esecuzione è pari a $O(\min(2^n, nC))$

Zaino con dizionario (Python)

```
def knapsackRec(w, p, i, c, DP):
  if c < 0:
    return -math.inf
  elif i == 0 or c == 0:
    return 0
  else:
    if not (i,c) in DP:
      nottaken = knapsackRec(w, p, i-1, c, DP)
      taken = knapsackRec(w, p, i-1, c-w[i-1], DP) + p[i-1]
      DP[i,c] = max(nottaken, taken)
    return DP[i,c]

def knapsack(w,p,C):
  n = len(w)
  DP = {}
  return knapsackRec(w,p,n,C,DP)
```

Memoization automatica in Python

```
from functools import wraps

def memo(func):
  cache = {}
  @wraps(func)
  def wrap(*args):
    if args not in cache:
      cache[args] = func(*args)
    return cache[args]
  return wrap
```

Memoization automatica in Python

```
@memo
def knapsackRec(w, p, i, c):
  if c < 0:
    return -math.inf
  elif i == 0 or c == 0:
    return 0
  else:
    nottaken = knapsackRec(w, p, i-1, c)
    taken = knapsackRec(w, p, i-1, c-w[i-1]) + p[i-1]
    return max(nottaken, taken)

def knapsack(w, p, C):
  return knapsackRec(w, p, len(w), C)
```

Ricostruzione della soluzione

Per esercizio

```
w = [ 4, 2, 3, 4]
p = [10, 7, 8, 6]
C = 9
```

	c									
i	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0										
1		-1	**0**	**0**	**10**	**10**	**10**	**10**	-1	**10**
2		-1	**7**	-1	-1	**10**	**17**	-1	-1	**17**
3		-1	-1	-1	-1	**15**	-1	-1	-1	**25**
4		-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	**25**

Sommario

1. Zaino con memoization
2. Variante dello zaino, senza limiti
3. Sottosequenza comune massimale

Variante dello zaino: senza limiti

Problema dello Zaino, senza limiti di scelta

Dato uno zaino di capacità C e n oggetti caratterizzati da peso w e profitto p, definiamo $DP[i][c]$ come il massimo profitto che può essere ottenuto dai primi $i \leq n$ oggetti contenuti in uno zaino di capacità $c \leq C$, senza porre limiti al numero di volte che un oggetto può essere selezionato.

Come modificare la formula ricorsiva?

$$DP[i][c] = \begin{cases} 0 & i = 0 \textbf{ or } c = 0 \\ -\infty & c < 0 \\ \max(DP[i-1][c - w[i]] + p[i], DP[i-1][c]) & \text{otherwise} \end{cases}$$

Variante dello zaino: senza limiti

Problema dello Zaino, senza limiti di scelta

Dato uno zaino di capacità C e n oggetti caratterizzati da peso w e profitto p, definiamo $DP[i][c]$ come il massimo profitto che può essere ottenuto dai primi $i \leq n$ oggetti contenuti in uno zaino di capacità $c \leq C$, senza porre limiti al numero di volte che un oggetto può essere selezionato.

Come modificare la formula ricorsiva?

$$DP[i][c] = \begin{cases} 0 & i = 0 \textbf{ or } c = 0 \\ -\infty & c < 0 \\ \max(DP[i \not{-} 1][c - w[i]] + p[i], DP[i-1][c]) & \text{otherwise} \end{cases}$$

Variante dello zaino: senza limiti

Semplificazione formula

In un caso come questo, è possibile semplificare la formula riducendo lo spazio occupato

Valore della soluzione

Dato uno zaino senza limiti di scelta di capacità C e n oggetti caratterizzati da peso w e profitto p, definiamo $DP[c]$ come il massimo profitto che può essere ottenuto da tali oggetti in uno zaino di capacità $c \leq C$.

$$DP[c] = \begin{cases} ? & c = 0 \\ ? & c > 0 \end{cases}$$

Variante dello zaino: senza limiti

Semplificazione formula

In un caso come questo, è possibile semplificare la formula riducendo lo spazio occupato

Valore della soluzione

Dato uno zaino senza limiti di scelta di capacità C e n oggetti caratterizzati da peso w e profitto p, definiamo $DP[c]$ come il massimo profitto che può essere ottenuto da tali oggetti in uno zaino di capacità $c \leq C$.

$$DP[c] = \begin{cases} 0 & c = 0 \\ ? & c > 0 \end{cases}$$

Variante dello zaino: senza limiti

Semplificazione formula

In un caso come questo, è possibile semplificare la formula riducendo lo spazio occupato

Valore della soluzione

Dato uno zaino senza limiti di scelta di capacità C e n oggetti caratterizzati da peso w e profitto p, definiamo $DP[c]$ come il massimo profitto che può essere ottenuto da tali oggetti in uno zaino di capacità $c \leq C$.

$$DP[c] = \begin{cases} 0 & c = 0 \\ \max_{w[i] \leq c} \{DP[c - w[i]] + p[i]\} & c > 0 \end{cases}$$

Implementazione tramite memoization

int knapsack(**int**[ ] w, **int**[ ] p, **int** n, **int** C)

int[ ] DP = **new** **int**$[0 \ldots C] = \{-1\}$
return knapsackRec(w, p, n, C, DP)

Implementazione tramite memoization

```
int knapsackRec(int[] w, int[] p, int n, int c, int[] DP)
if c == 0 then
    return 0
if DP[c] < 0 then
    int maxSoFar = 0
    for i = 1 to n do
        if w[i] ≤ c then
            int val = knapsackRec(w, p, n, c − w[i], DP) + p[i]
            maxSoFar = max(maxSoFar, val)
    DP[c] = maxSoFar
return DP[c]
```

Complessità computazionale?

Qual è la complessità della funzione knapsack()?

```
int knapsackRec(int[] w, int[] p, int n, int c, int[] DP)
if c==0 then
    return 0
if DP[c] < 0 then
    maxSoFar = 0
    for i = 1 to n do
        if w[i] ≤ c then
            int val = knapsackRec(w, p, n, c − w[i], DP) + p[i])
            maxSoFar == max(maxSoFar, val)
    DP[c] = maxSoFar
return DP[c]
```

Complessità computazionale?

Qual è la complessità della funzione knapsack()?

$$T(n) = O(nC)$$

- Nel caso pessimo, è necessario riempire ognuno dei C elementi del vettore DP
- Riempire un elemento costa $O(n)$

Riduzione dello spazio occupato

Vantaggi

- La complessità in spazio è pari a $\Theta(C)$
- Non è detto che tutti gli elementi debbano essere riempiti

Svantaggi

Questo approccio rende più difficile ricostruire la soluzione.

- Possiamo ispezionare tutti gli elementi per capire da dove deriva il massimo
- Conviene tuttavia memorizzare l'indice da cui deriva il massimo

Implementazione tramite memoization

int knapsack(**int**[ ] w, **int**[ ] p, **int** n, **int** C)

int[ ] DP = **new** **int**$[0 \dots C] = \{-1\}$
int[ ] pos = **new** **int**$[0 \dots C] = \{-1\}$
knapsackRec(w, p, n, C, DP, pos)
return solution(w, C, pos)

Implementazione tramite memoization

```
int knapsackRec(int[] w, int[] p, int n, int c, int[] DP, int[] pos)
if c == 0 then
    return 0
if DP[c] < 0 then
    DP[c] = 0
    for i = 1 to n do
        if w[i] ≤ c then
            int val = knapsackRec(w, p, n, c − w[i], DP, pos) + p[i])
            if val ≥ DP[c] then
                DP[c] = val
                pos[c] = i
return DP[c]
```

Implementazione tramite memoization

```
List solution(int[] w, int c, int[] pos)
if c==0 or pos[c] < 0 then
    return List()
else
    List L = solution(w, c − w[pos[c]], pos)
    L.insert(L.head(), pos[c])
    return L
```

- Restituisce una lista di indici selezionati (multinsieme, gli indici possono comparire più volte)
- Se $c = 0$, lo zaino è stato riempito perfettamente
- Se $pos[c] < 0$, lo zaino non può essere riempito interamente (e.g., pesi pari con capacità dispari).

Sommario

1. Zaino con memoization
2. Variante dello zaino, senza limiti
3. Sottosequenza comune massimale

Problema generale

DNA

Una stringa di molecole chiamate basi (Adenina, Citosina, Guanina, Timina)

Problema

Date due sequenze di DNA, trovare quanto siano "simili"

Esempi

- Una sottostringa dell'altra?
  CCTT $\subseteq$ AGACCCTTAA
- Distanza di edit:
  AGACCCTTAA può essere trasformata in AGACTCTTAA sostituendo una T con una C

Sottosequenza comune massimale

Definizione: sottosequenza

- Una sequenza P è una sottosequenza di T se P è ottenuto da T rimuovendo uno o più dei suoi elementi
- Alternativamente: P è definito come il sottoinsieme degli indici $\{1, \ldots, n\}$ degli elementi di T che compaiono anche in P
- I rimanenti elementi sono elencati nello stesso ordine, senza essere necessariamente contigui

Esempi

- P = "AAATA"
- T = "AAAATTGA"

Note

La sequenza vuota $\emptyset$ è sottosequenza di ogni altra sequenza

Sottosequenza comune massimale

Definizione: sottosequenza comune

Una sequenza X è una sottosequenza comune (common subsequence) di due sequenze T, U, se è sottosequenza sia di T che di U

- Scriviamo $X \in \mathcal{CS}(T, U)$

Definizione: sottosequenza comune massimale

Una sequenza $X \in \mathcal{CS}(T, U)$ è una sottosequenza comune massimale (longest common subsequence) di due sequenze T, U, se non esiste altra sottosequenza comune $Y \in \mathcal{CS}(T, U)$ tale che Y sia più lunga di X ($|Y| > |X|$).

- Scriviamo $X \in \mathcal{LCS}(T, U)$

Definizione del problema

Problema: LCS

Date due sequenze T e U, trovare la più lunga sottosequenza comune di T e U.

Esempio

- $T =$ ‘‘`AAAATTGGA`’’
- $U =$ ‘‘`TAACGATATGGA`’’
- Output?

Come risolvereste questo problema?

Una soluzione di "forza bruta"

int LCS(ITEM[] T, ITEM[] U)

ITEM[] $maxsofar = \textbf{nil}$
foreach subsequence X of T **do**
    if X is subsequence of U **then**
        if $\mathsf{len}(X) > \mathsf{len}(maxsofar)$ **then**
            $maxsofar = X$
return $maxsofar$

Complessità computazionale

Domande

- Data una sequenza T lunga n, quante sono le sottosequenze di T?

Complessità computazionale

Domande

- Data una sequenza T lunga n, quante sono le sottosequenze di T?
  2^n
- Quanto costa verificare se una sequenza è sottosequenza di un'altra?

Complessità computazionale

Domande

- Data una sequenza T lunga n, quante sono le sottosequenze di T?
  2^n
- Quanto costa verificare se una sequenza è sottosequenza di un'altra?
  $O(m+n)$
- Qual è la complessità computazionale di LCS()?

Complessità computazionale

Domande

- Data una sequenza T lunga n, quante sono le sottosequenze di T?
  2^n
- Quanto costa verificare se una sequenza è sottosequenza di un'altra?
  $O(m+n)$
- Qual è la complessità computazionale di LCS()?
  $T(n) = \Theta(2^n(m+n))$
- Possiamo fare meglio di così?

Descrizione matematica della soluzione ottima

Prefisso (Prefix)

Data una sequenza T composta dai caratteri $t_1 t_2 \ldots t_n$, denotiamo con $T(i)$ il prefisso di T dato dai primi i caratteri, i.e.:

$$T(i) = t_1 t_2 \ldots t_i$$

Esempi

- $T =$ `"ABDCCAABD"`
- $T(0) =$ `""`
- $T(3) =$ `"ABD"`
- $T(6) =$ `"ABDCCA"`

Descrizione matematica della soluzione ottima

Goal

Date due sequenze T e U di lunghezza n e m, scriviamo una formula ricorsiva $LCS(T(i), U(j))$ che restituisca la LCS dei prefissi $T(i)$ e $U(j)$.

$$LCS(T(i), U(j)) = \begin{cases} ? & \text{Caso base} \\ ? & \text{Casi ricorsivi} \end{cases}$$

Casi ricorsivi

Caso 1

Gli ultimi caratteri di $T(i)$ e di $U(j)$ coincidono: $t_i = u_j$.
Come calcolereste la LCS di $T(i)$ e $U(j)$?

- Esempio: $T(i) =$ `"ALBERTO"`, $U(j) =$ `"PIERO"`

Casi ricorsivi

Caso 1

Gli ultimi caratteri di $T(i)$ e di $U(j)$ coincidono: $t_i = u_j$.
Come calcolereste la LCS di $T(i)$ e $U(j)$?

- Esempio: $T(i) =$ `"ALBERTO"`, $U(j) =$ `"PIERO"`

Soluzione

$$LCS(T(i), U(j)) = LCS(T(i-1), U(j-1)) \oplus t_i$$

dove $\oplus$ è l'operatore di concatenazione.

- $LCS($`"ALBERTO"`, `"PIERO"`$) = LCS($`"ALBERT"`, `"PIER"`$) \oplus$ `"O"`

Casi ricorsivi

Caso 2

Gli ultimi caratteri di $T(i)$ e di $U(j)$ non coincidono: $t_i \neq u_j$.
Come calcolereste la LCS di i e j?

- Esempio: $T(i) =$ `"ALBERT"`, $U(j) =$ `"PIER"`

Casi ricorsivi

Caso 2

Gli ultimi caratteri di $T(i)$ e di $U(j)$ non coincidono: $t_i \neq u_j$.
Come calcolereste la LCS di i e j?

- Esempio: $T(i) =$ `"ALBERT"`, $U(j) =$ `"PIER"`

Soluzione

$$LCS(T(i), U(j)) = longest(LCS(T(i-1), U(j)), LCS(T(i), U(j-1))$$

- $LCS($`"ALBERT"`, `"PIER"`$) =$
  $longest(LCS($`"ALBER"`, `"PIER"`$), LCS($`"ALBERT"`, `"PIE"`$))$

Casi base

Casi base

Qual è la più lunga sottosequenza di $T(i)$ e $U(j)$, quando uno dei prefissi è vuoto, i.e. se $i = 0$ **or** $j = 0$?

- Esempio: $T(i) =$ `"ALBERTO"`, $U(0) = \emptyset$

Casi base

Casi base

Qual è la più lunga sottosequenza di $T(i)$ e $U(j)$, quando uno dei prefissi è vuoto, i.e. se $i = 0$ **or** $j = 0$?

- Esempio: $T(i) =$ `"ALBERTO"`, $U(0) = \emptyset$

Soluzione

$$LCS(T(i), U(0)) = \emptyset$$

- $LCS(\texttt{"ALBERTO"}, \emptyset) = \emptyset$

La formula completa

$$LCS(T(i), U(j)) = \begin{cases} \emptyset & i = 0 \textbf{ or } j = 0 \\ LCS(T(i-1), U(j-1)) \oplus t_i & i > 0 \textbf{ and } j > 0 \textbf{ and } t_i = u_j \\ longest(LCS(T(i-1), U(j)), & \\ \quad LCS(T(i), U(j-1)) & i > 0 \textbf{ and } j > 0 \textbf{ and } t_i \neq u_j \end{cases}$$

Dimostrazione

Il fatto che la formula sia corretta dovrebbe essere provato. La dimostrazione è per assurdo.

Sottostruttura ottima

Teorema – Sottostruttura ottima

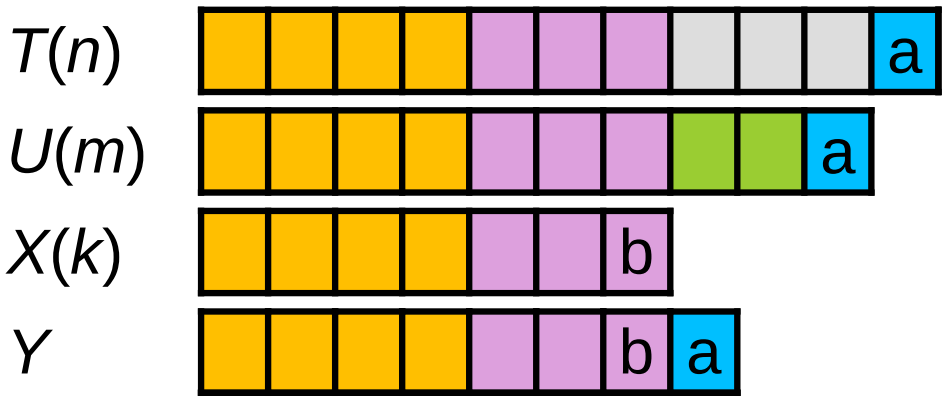
Date le due sequenze $T = (t_1, \ldots, t_n)$ e $U = (u_1, \ldots, u_m)$, sia $X = (x_1, \ldots, x_k)$ una LCS di T e U. Sono dati tre casi:

1. $t_n = u_m \quad \Rightarrow \quad x_k = t_n = u_m$ **and** $X(k-1) \in \mathcal{LCS}(T(n-1), U(m-1))$
2. $t_n \neq u_m \wedge x_k \neq t_n \quad \Rightarrow \quad X \in \mathcal{LCS}(T(n-1), U)$
3. $t_n \neq u_m \wedge x_k \neq u_m \quad \Rightarrow \quad X \in \mathcal{LCS}(T, U(m-1))$

Dimostrazione – Punto 1 – Parte A

$t_n = u_m \Rightarrow x_k = t_n = u_m$

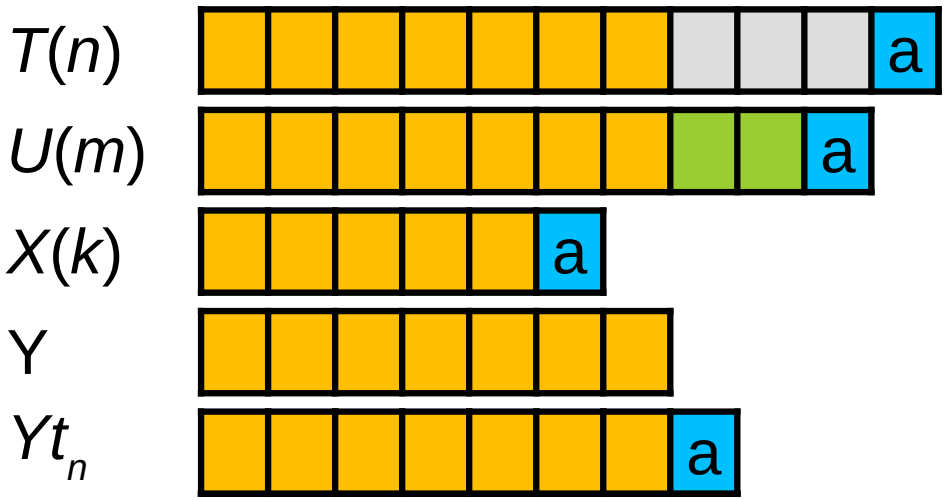
- Per assurdo: $x_k \neq t_n = u_m$.
- Si consideri $Y = Xt_n$.
- Allora $Y \in \mathcal{CS}(T, U)$ e $|Y| > |X|$, contraddizione.



Dimostrazione – Punto 1 – Parte B

$$t_n = u_m \Rightarrow X(k-1) \in LCS(T(n-1), U(m-1))$$

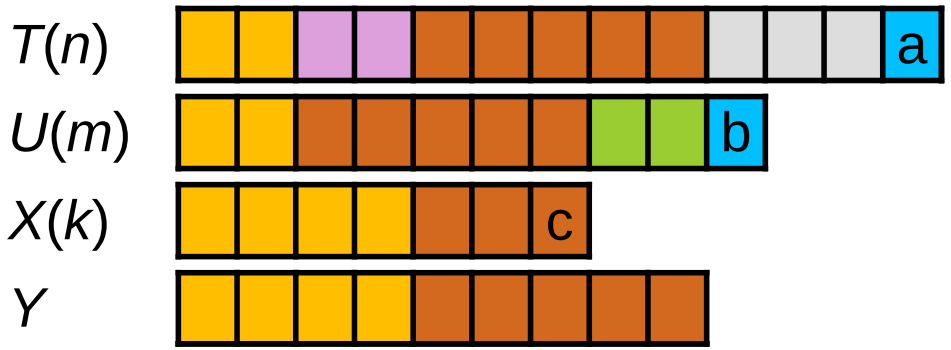
- Per assurdo: $X(k-1) \notin \mathcal{LCS}(T(n-1), U(m-1))$.
- Allora $\exists Y \in \mathcal{LCS}(T(n-1), U(m-1))$ tale che $|Y| > |X(k-1)|$.
- Quindi $Yt_n \in \mathcal{CS}(T, U)$ e $|Yt_n| > |X(k-1)t_n| = X$, contraddizione.



Dimostrazione – Punto 2 (Punto 3 simmetrico)

$$t_n \neq u_m \wedge x_k \neq t_n \Rightarrow X \in \mathcal{LCS}(T(n-1), U)$$

- Per assurdo: $X \notin \mathcal{LCS}(T(n-1), U)$.
- Allora $\exists Y \in \mathcal{LCS}(T(n-1), U)$ tale che $|Y| > |X|$.
- Quindi è anche vero che $Y \in \mathcal{LCS}(T, U)$.
- Quindi X non è una LCS di T e U, assurdo.



Ricorrenza per il valore della soluzione ottimale

Lunghezza della LCS

Date due sequenze T e U di lunghezza n e m, scrivere una formula ricorsiva $DP[i][j]$ che restituisca la lunghezza della LCS dei prefissi $T(i)$ e $U(j)$.

$$DP[i][j] = \begin{cases} ? & i = 0 \textbf{ or } j = 0 \\ ? & i > 0 \textbf{ and } j > 0 \textbf{ and } t_i = u_j \\ ? & i > 0 \textbf{ and } j > 0 \textbf{ and } t_i \neq u_j \end{cases}$$

Ricorrenza per il valore della soluzione ottimale

Lunghezza della LCS

Date due sequenze T e U di lunghezza n e m, scrivere una formula ricorsiva $DP[i][j]$ che restituisca la lunghezza della LCS dei prefissi $T(i)$ e $U(j)$.

$$DP[i][j] = \begin{cases} 0 & i = 0 \textbf{ or } j = 0 \\ ? & i > 0 \textbf{ and } j > 0 \textbf{ and } t_i = u_j \\ ? & i > 0 \textbf{ and } j > 0 \textbf{ and } t_i \neq u_j \end{cases}$$

Ricorrenza per il valore della soluzione ottimale

Lunghezza della LCS

Date due sequenze T e U di lunghezza n e m, scrivere una formula ricorsiva $DP[i][j]$ che restituisca la lunghezza della LCS dei prefissi $T(i)$ e $U(j)$.

$$DP[i][j] = \begin{cases} 0 & i = 0 \textbf{ or } j = 0 \\ DP[i-1][j-1] + 1 & i > 0 \textbf{ and } j > 0 \textbf{ and } t_i = u_j \\ ? & i > 0 \textbf{ and } j > 0 \textbf{ and } t_i \neq u_j \end{cases}$$

Ricorrenza per il valore della soluzione ottimale

Lunghezza della LCS

Date due sequenze T e U di lunghezza n e m, scrivere una formula ricorsiva $DP[i][j]$ che restituisca la lunghezza della LCS dei prefissi $T(i)$ e $U(j)$.

$$DP[i][j] = \begin{cases} 0 & i = 0 \textbf{ or } j = 0 \\ DP[i-1][j-1] + 1 & i > 0 \textbf{ and } j > 0 \textbf{ and } t_i = u_j \\ \max\{DP[i-1][j], DP[i][j-1]\} & i > 0 \textbf{ and } j > 0 \textbf{ and } t_i \neq u_j \end{cases}$$

Ricorrenza per il valore della soluzione ottimale

Lunghezza della LCS

Date due sequenze T e U di lunghezza n e m, scrivere una formula ricorsiva $DP[i][j]$ che restituisca la lunghezza della LCS dei prefissi $T(i)$ e $U(j)$.

$$DP[i][j] = \begin{cases} 0 & i = 0 \textbf{ or } j = 0 \\ DP[i-1][j-1] + 1 & i > 0 \textbf{ and } j > 0 \textbf{ and } t_i = u_j \\ \max\{DP[i-1][j], DP[i][j-1]\} & i > 0 \textbf{ and } j > 0 \textbf{ and } t_i \neq u_j \end{cases}$$

Dove si trova l'informazione relativa al problema originale?

Ricorrenza per il valore della soluzione ottimale

Lunghezza della LCS

Date due sequenze T e U di lunghezza n e m, scrivere una formula ricorsiva $DP[i][j]$ che restituisca la lunghezza della LCS dei prefissi $T(i)$ e $U(j)$.

$$DP[i][j] = \begin{cases} 0 & i = 0 \textbf{ or } j = 0 \\ DP[i-1][j-1] + 1 & i > 0 \textbf{ and } j > 0 \textbf{ and } t_i = u_j \\ \max\{DP[i-1][j], DP[i][j-1]\} & i > 0 \textbf{ and } j > 0 \textbf{ and } t_i \neq u_j \end{cases}$$

Dove si trova l'informazione relativa al problema originale?

$DP[n][m]$ contiene la lunghezza della LCS del problema originale.

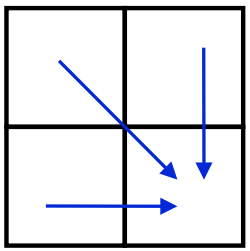
Calcolare la lunghezza della LCS

```
int lcs(Item[] T, Item[] U, int n, int m)
int[][] DP = new int[0...n][0...m]
for i = 0 to n do
    DP[i][0] = 0
for j = 0 to m do
    DP[0][j] = 0
for i = 1 to n do
    for j = 1 to m do
        if T[i] == U[j] then
            DP[i][j] = DP[i − 1][j − 1] + 1
        else
            DP[i][j] = max(DP[i − 1][j], DP[i][j − 1])
return DP[n][m]
```

Esempio 1

- **TACCBT**
- **ATBCBD**

↘ deriva da *i*-1,*j*-1
↓ deriva da *i*-1,*j*
→ deriva da *i*,*j*-1



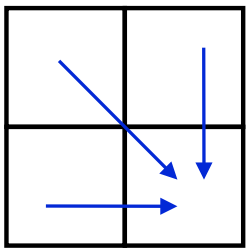
i \ j		0	1	2	3	4	5	6
			A	**T**	**B**	**C**	**B**	**D**
0		0	0	0	0	0	0	0
1	**T**	0	↓0	↘ 1	→1	→1	→1	→1
2	**A**	0	↘ 1	↓ 1	↓ 1	↓ 1	↓ 1	↓ 1
3	**C**	0	↓ 1	↓ 1	↓ 1	↘ 2	→2	→2
4	**C**	0	↓ 1	↓ 1	↓ 1	↘ 2	↓ 2	→2
5	**B**	0	↓ 1	↓ 1	↘ 2	↓ 2	↘ 3	→3
6	**T**	0	↓ 1	↘ 2	↓ 2	↓ 2	↓ 3	↓ 3

$$DP[i][j] = \begin{cases} 0 & i = 0 \textbf{ or } j = 0 \\ DP[i-1][j-1] + 1 & i > 0 \textbf{ and } j > 0 \textbf{ and } t_i = u_j \\ \max\{DP[i-1][j], DP[i][j-1]\} & i > 0 \textbf{ and } j > 0 \textbf{ and } t_i \neq u_j \end{cases}$$

Ricostruire la soluzione

- **ACGGCT**
- **CTCTGT**

↘ deriva da *i*-1,*j*-1
↓ deriva da *i*-1,*j*
→ deriva da *i*,*j*-1



i \ j		0	1	2	3	4	5	6
			C	**T**	**C**	**T**	**G**	**T**
0		0	0	0	0	0	0	0
1	**A**	0	↓ 0	↓ 0	↓ 0	↓ 0	↓ 0	↓ 0
2	**C**	0	↘1	→1	↘ 1	→1	→1	→1
3	**G**	0	↓ 1	↓ 1	↓ 1	↓ 1	↘2	→2
4	**G**	0	↓ 1	↓ 1	↓ 1	↓ 1	↘ 2	↓ 2
5	**C**	0	↘ 1	↓ 1	↘2	→2	↓ 2	↓ 2
6	**T**	0	↓ 1	↘2	↓ 2	↘ 3	→3	↘ 3

Utilizzando la tabella, come possiamo ottenere la soluzione?

Ricostruire la sottosequenza comune

```
int lcs(Item[] T, Item[] U, int n, int m)
...
return subsequence(DP, T, U, n, m)
```

```
List subsequence(int[][] DP, Item[] T, Item[] U, int i, int j)
if i == 0 or j == 0 then
    return List()
if T[i] == U[j] then
    S = subsequence(DP, T, U, i − 1, j − 1)
    S.insert(S.head(), T[i])
    return S
else
    if DP[i − 1][j] > DP[i][j − 1] then
        return subsequence(DP, T, U, i − 1, j)
    else
        return subsequence(DP, T, U, i, j − 1)
```

Complessità computazionale

Qual è la complessità computazionale di subsequence()?

Complessità computazionale

Qual è la complessità computazionale di subsequence()?

$$T(n) = O(m+n)$$

Qual è la complessità computazionale di LCS()?

Complessità computazionale

Qual è la complessità computazionale di subsequence()?

$$T(n) = O(m+n)$$

Qual è la complessità computazionale di LCS()?

$$T(n) = O(mn)$$

Misura di similitudine

Se si vuole solo misurare la lunghezza della LCS senza ricostruire la soluzione, è possibile conservare solo la riga precedente.

```
int lcs(Item[] T, Item[] U, int n, int m)
int[][] DP' = new int[0...m]
int[][] DP = new int[0...m]
for j = 0 to m do
    DP[j] = 0
for i = 1 to n do
    DP', DP = DP, DP'
    DP[0] = 0
    for j = 1 to m do
        if T[i] == U[j] then
            DP[j] = DP'[j - 1] + 1
        else
            DP[j] = max(DP'[j], DP[j - 1])
return DP[m]
```

Commenti finali

Take-home message (prendi e porta a casa)

Non sempre è necessario memorizzare informazioni aggiuntive per ricostruire la soluzione.

Take-home message (prendi e porta a casa)

Se non è necessario ricostruire la soluzione, è possibile risparmiare spazio conservando solo i dati ancora utili.

Reality check – LCS e `diff`

`diff`

- Esamina due file di testo, evidenziondone le differenze a livello di riga.
- Lavorare a livello di riga significa che i confronti fra simboli sono in realtà confronti fra righe, e che n ed m sono il numero di righe dei due file

Ottimizzazioni

- `diff` è utilizzato soprattutto per codice sorgente; è possibile applicare euristiche sulle righe iniziali e finali
- Per distinguere le righe - utilizzo di funzioni hash

Reality check – LCS e `diff`

```
Questo è il testo originale
alcune linee non dovrebbero
cambiare mai
altre invece vengono
rimosse
altre vengono aggiunte
```

```
Questo è il testo nuovo
alcune linee non dovrebbero
cambiare mai
altre invece vengono
cancellate
altre vengono aggiunte
come questa
```

```
- Questo è il testo originale
+ Questo è il testo nuovo
  alcune linee non dovrebbero
  cambiare mai
  altre invece vengono
- rimosse
+ cancellate
  altre vengono aggiunte
+ come questa
```

Figura 13.4: Il file `original.txt` (a sinistra); il file `new.txt` (al centro); l'output di `diff original.txt new.txt` (a destra).