Algoritmi e Strutture Dati

Scelta della struttura dati

Alberto Montresor

Università di Trento

2025/03/15

Sommario

Problema cammini minimi

Input

- Grafo orientato $G = (V, E)$
- Un nodo sorgente s
- Una funzione di peso $w : E \rightarrow R$

Definizione

Dato un cammino $p = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ con $k > 1$, il costo del cammino è dato da

$$w(p) = \sum_{i=2}^{k} w(v_{i-1}, v_i)$$

Output

Trovare un cammino da s ad u, per ogni nodo $u \in V$, il cui costo sia minimo, ovvero più piccolo o uguale del costo di qualunque altro cammino da s a u.

Panoramica sul problema

Cammini minimi da singola sorgente

- Input: Grafo pesato, nodo radice s
- Output: i cammini minimi che vanno da s a tutti gli altri nodi

Cammino minimo tra una coppia di vertici

- Input: Grafo pesato, una coppia di vertici s, d
- Output: un cammino minimo fra s e d
- Si risolve il primo problema e si estrae il cammino richiesto
  Non si conoscono algoritmi più efficienti

Panoramica sul problema

Cammini mimimi tra tutte le coppie di vertici

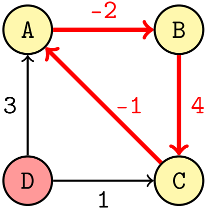
- Input: Grafo pesato
- Output: i cammini minimi fra tutte le coppie di vertici.
- Soluzione basata su programmazione dinamica

Pesi

Tipologie di pesi

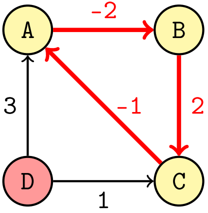
Algoritmi diversi possono funzionare oppure no per alcune categorie speciali di pesi

- Positivi / positivi+negativi
- Reali / interi



Esempio: proprietario di un TIR

- Viaggiare scarico: perdita, peso positivo
- Viaggiare carico: profitto, peso negativo

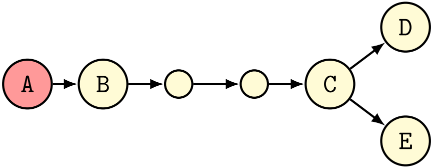


Domanda: perché i cicli negativi sono un problema?

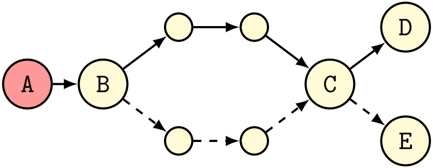
Sommario

Problema cammini minimi – Sottostruttura ottima

Si noti che due cammini minimi possono avere un tratto in comune $A \rightsquigarrow C$ ...



... ma non possono convergere in un nodo comune C dopo aver percorso un tratto distinto



Albero dei cammini minimi

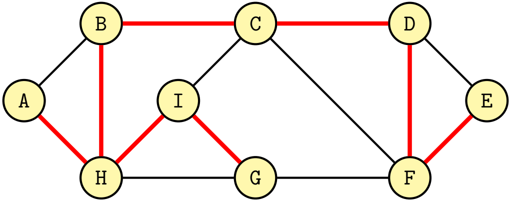
L'albero dei cammini minimi è un albero di copertura radicato in s avente un cammino da s a tutti i nodi raggiungibili da s.

Albero di copertura

Albero di copertura (Spanning tree)

Dato un grafo $G = (V, E)$ non orientato e connesso, un albero di copertura di G è un sottografo $T = (V, E_T)$ tale che

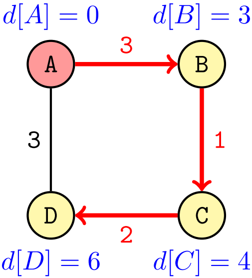
- T è un albero
- $E_T \subseteq E$
- T contiene tutti i vertici di G

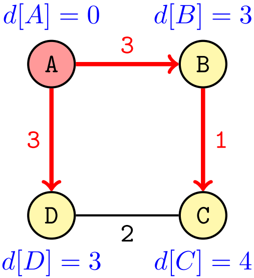


Soluzione ammissibile

Soluzione ammissibile

Una soluzione ammissibile può essere descritta da un albero di copertura T radicato in s e da un vettore di distanza d,
i cui valori $d[u]$ rappresentano il costo del cammino da s a u in T.





Rappresentazione dell'albero

Per rappresentare l'albero, utilizziamo la rappresentazione basata su vettore dei padri, così come abbiamo fatto con le visite in ampiezza/profondità.

```
printPath(NODE s, NODE d, NODE[] T)
if s == d then
    print s
else if T[d] == nil then
    print "error"
else
    printPath(s, T[d], T)
    print d
```

Teorema di Bellman

Teorema di Bellman

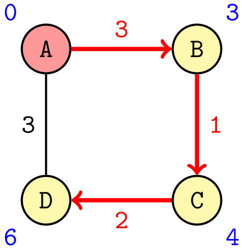
Una soluzione ammissibile T è ottima se e solo se:

$$d[v] = d[u] + w(u,v) \qquad \text{per ogni arco } (u,v) \in T$$

$$d[v] \leq d[u] + w(u,v) \qquad \text{per ogni arco } (u,v) \in E$$

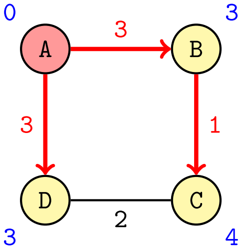
$d[B] = d[A] + w(A,B)$ $\quad$ $d[C] = d[B] + w(B,C)$

$d[D] = d[C] + w(C,D)$ $\quad$ $d[D] > d[A] + w(A,D)$



$d[B] = d[A] + w(A,B)$ $\quad$ $d[C] = d[B] + w(B,C)$

$d[D] = d[A] + w(A,D)$ $\quad$ $d[D] \leq d[C] + w(C,D)$



Dimostrazione

Teorema di Bellman - Parte 1

Se T è una soluzione ottima, allora valgono le condizioni di Bellman:

$$d[v] = d[u] + w(u, v) \qquad \text{per ogni arco } (u, v) \in T$$

$$d[v] \leq d[u] + w(u, v) \qquad \text{per ogni arco } (u, v) \in E$$

Sia T una soluzione ottima e sia $(u, v) \in E$.

- Se $(u, v) \in T$, allora $d[v] = d[u] + w(u, v)$
- Se $(u, v) \notin T$, allora $d[v] \leq d[u] + w(u, v)$, perchè altrimenti esisterebbe nel grafo G un cammino da s a v più corto di quello in T, assurdo.

Dimostrazione

Teorema di Bellman - Parte 2

Se valgono le condizioni di Bellman:

$$d[v] = d[u] + w(u, v) \qquad \text{per ogni arco } (u, v) \in T$$
$$d[v] \leq d[u] + w(u, v) \qquad \text{per ogni arco } (u, v) \in E$$

allora T è una soluzione ottima.

- Supponiamo per assurdo che T non sia ottimo
- Allora esiste un cammino C da s ad un nodo u in T non ottimo
- Allora esiste un albero ottimo T', in cui il cammino C' da s a u ha distanza $d'[u] < d[u]$
- Sia d' il vettore delle distanze associato a T'

Dimostrazione

Teorema di Bellman - Parte 2

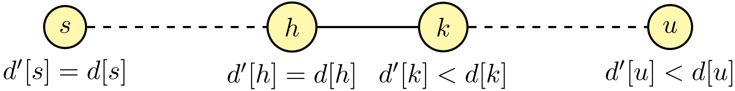
Se valgono le condizioni di Bellman:

$$d[v] = d[u] + w(u,v) \qquad \text{per ogni arco } (u,v) \in T$$

$$d[v] \leq d[u] + w(u,v) \qquad \text{per ogni arco } (u,v) \in E$$

allora T è una soluzione ottima.

- Poichè $d'[s] = d[s] = 0$, ma $d'[u] < d[u]$, esiste un arco (h,k) in C' tale che:
  - $d'[h] = d[h]$ e
  - $d'[k] < d[k]$



Dimostrazione

Teorema di Bellman - Parte 2

Se valgono le condizioni di Bellman:

$$d[v] = d[u] + w(u,v) \qquad \text{per ogni arco } (u,v) \in T$$

$$d[v] \leq d[u] + w(u,v) \qquad \text{per ogni arco } (u,v) \in E$$

allora T è una soluzione ottima.

- Per costruzione: $d'[h] = d[h]$
- Per costruzione: $d'[k] = d'[h] + w(h,k)$
- Per ipotesi: $d[k] \leq d[h] + w(h,k)$
- Combinando queste due relazioni, si ottiene:

$$d'[k] = d'[h] + w(h,k) = d[h] + w(h,k) \geq d[k]$$

Quindi $d'[k] \geq d[k]$, il che contraddice $d'[k] < d[k]$

Algoritmo prototipo – Rilassamento

$(\textbf{int}[\,], \textbf{int}[\,])$ prototipoCamminiMinimi(GRAPH G, NODE s)

```
% Inizializza T ad una foresta di copertura composta da nodi isolati
% Inizializza d con sovrastima della distanza (d[s] = 0, d[x] = +∞)
while ∃(u, v) : d[u] + G.w(u, v) < d[v] do
    d[v] = d[u] + G.w(u, v)
    % Sostituisci il padre di v in T con u
return (T, d)
```

Note

- Se al termine dell'esecuzione qualche nodo mantiene una distanza infinita, esso non è raggiungibile
- Come implementare la condizione $\exists$?

Algoritmo generico

$(\textbf{int}[\,], \textbf{int}[\,])$ shortestPath(GRAPH G, NODE s)

$\textbf{int}[\,]\ d = \textbf{new int}[1 \ldots G.n]$ % $d[u]$ è la distanza da s a u
$\textbf{int}[\,]\ T = \textbf{new int}[1 \ldots G.n]$ % $T[u]$ è il padre di u nell'albero T
$\textbf{boolean}[\,]\ b = \textbf{new boolean}[1 \ldots G.n]$ % $b[u]$ è **true** se $u \in S$
foreach $u \in G.\mathsf{V}() - \{s\}$ **do**
    $T[u] = \textbf{nil}$
    $d[u] = +\infty$
    $b[u] = \textbf{false}$
$T[s] = \textbf{nil}$
$d[s] = 0$
$b[s] = \textbf{true}$
[...]

Algoritmo generico

shortestPath(GRAPH G, NODE s) – Corpo principale

```
(1) DATASTRUCTURE S = DataStructure(); S.add(s)
    while not S.isEmpty() do
(2)     int u = S.extract()
        b[u] = false
        foreach v ∈ G.adj(u) do
            if d[u] + G.w(u, v) < d[v] then
                if not b[v] then
(3)                 S.add(v)
                    b[v] = true
                else
(4)                 % Azione da svolgere nel caso v sia già presente in S
                T[v] = u
                d[v] = d[u] + G.w(u, v)
    return (T, d)
```

Dijkstra, 1959

Storia

- Sviluppato da Edsger W. Dijkstra nel 1956, pubblicato nel 1959
- Nella versione originale:
  - Veniva utilizzata per trovare la distanza minima fra due nodi
  - Utilizzava il concetto di coda con priorità
  - Tenete conto però che gli heap sono stati proposti nel 1964

Note

- Funziona (bene) solo con pesi positivi
- Utilizzato in protocolli di rete come IS-IS e OSPF

Dijkstra, 1959 – Coda con priorità basata su vettore

Linea (1): Inizializzazione

- Viene creato un vettore di dimensione n
- L'indice u rappresenta il nodo u-esimo
- Le priorità vengono inizializzate ad $+\infty$
- La priorità di s è posta uguale a 0
- Costo computazionale: $O(n)$

shortestPath(Graph G, Node s) – Corpo principale

(1) PriorityQueue Q = PriorityQueue(); Q.insert(s, 0)
while not Q.isEmpty() **do**
(2) **int** u = Q.deleteMin()
$b[u]$ = **false**
foreach $v \in G$.adj(u) **do**
if $d[u] + G.w(u, v) < d[v]$ **then**
[...]

Dijkstra, 1959 – Coda con priorità basata su vettore

Linea (2): Estrazione minimo

- Si ricerca il minimo all'interno del vettore
- Una volta trovato, si "cancella" la sua priorità
- Costo computazionale: $O(n)$

shortestPath(GRAPH G, NODE s) – Corpo principale

```
(1) PRIORITYQUEUE Q = PriorityQueue(); Q.insert(s, 0)
    while not Q.isEmpty() do
(2)     u = Q.deleteMin()
        b[u] = false
        foreach v ∈ G.adj(u) do
            if d[u] + G.w(u, v) < d[v] then
                [...]
    return (T, d)
```

Dijkstra, 1959 – Coda con priorità basata su vettore

Linea (3): Inserimento in coda

- Si registra la priorità nella posizione v-esima
- Costo computazionale: $O(1)$

shortestPath(GRAPH G, NODE s) – Corpo principale

```
[...]
if d[u] + G.w(u, v) < d[v] then
    if not b[v] then
(3)     Q.insert(v, d[u] + G.w(u, v))
        b[v] = true
    else
(4)     % Azione da svolgere nel caso v sia già presente in S
    T[v] = u
    d[v] = d[u] + G.w(u, v)
[...]
```

Dijkstra, 1959 – Coda con priorità basata su vettore

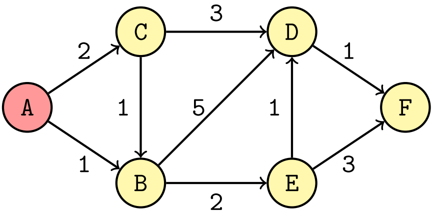
Linea (4): Aggiornamento priorità

- Si aggiorna la priorità nella posizione v-esima
- Costo computazionale: $O(1)$

shortestPath(GRAPH G, NODE s) – Corpo principale

```
[...]
if d[u] + G.w(u, v) < d[v] then
    if not b[v] then
(3)     Q.insert(v, d[u] + G.w(u, v))
        b[v] = true
    else
(4)     Q.decrease(v, d[u] + G.w(u, v))
    T[v] = u
    d[v] = d[u] + G.w(u, v)
[...]
```

Dijkstra, 1959 – Coda con priorità basata su vettore



		A	B	C	E	D	F
A	0	0	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$
B	∞	1	1	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$
C	∞	2	2	2	$\cancel{2}$	$\cancel{2}$	$\cancel{2}$
D	∞	∞	6	5	4	4	$\cancel{4}$
E	∞	∞	3	3	3	$\cancel{3}$	$\cancel{3}$
F	∞	∞	∞	∞	6	5	5

Spiegazione

- Ogni colonna contiene lo stato del vettore d all'inizio di ogni ripetizione del ciclo **while not** Q.isEmpty()
- Ogni riga v rappresenta l'evoluzione dello stato dell'elemento $d[v]$
- La legenda delle colonne rappresenta il nodo che viene estratto

Dijkstra

Correttezza per pesi positivi

- Ogni nodo viene estratto una e una sola volta
- Al momento dell'estrazione la sua distanza è minima

Per induzione sul numero k di nodi estratti

- Caso base: vero perchè $d[s] = 0$ e non ci sono pesi negativi
- Ipotesi induttiva: vero per i primi $k - 1$ nodi
- Passo induttivo: quando viene estratto il k-esimo nodo u:
  - La sua distanza $d[u]$ dipende dai $k - 1$ nodi già estratti
  - Non può dipendere dai nodi ancora da estrarre, che hanno distanza $\geq d[u]$
  - Quindi $d[u]$ è minimo e u non verrà più re-inserito, perchè non ci sono distanze negative

Dijkstra, 1959 – Coda con priorità basata su vettore

Costo computazionale

Riga	Costo	Ripet.
(1)	$O(n)$	1
(2)	$O(n)$	$O(n)$
(3)	$O(1)$	$O(n)$
(4)	$O(1)$	$O(m)$

Costo totale: $O(n^2)$

```
shortestPath(Graph G, Node s)
[...]
(1) PriorityQueue Q = PriorityQueue(); Q.insert(s, 0)
while not Q.isEmpty() do
(2)     u = Q.deleteMin()
        b[u] = false
        foreach v ∈ G.adj(u) do
            if d[u] + G.w(u, v) < d[v] then
                if not b[v] then
(3)                 Q.insert(v, d[u] + G.w(u, v))
                    b[v] = true
                else
(4)                 Q.decrease(v, d[u] + G.w(u, v))
                T[v] = u
                d[v] = d[u] + G.w(u, v)
return (T, d)
```

Johnson, 1977 – Coda con priorità basata su heap binario

Costo computazionale

Riga	Costo	Ripet.
(1)	$O(n)$	1
(2)	$O(\log n)$	$O(n)$
(3)	$O(\log n)$	$O(n)$
(4)	$O(\log n)$	$O(m)$

Costo totale: $O(m \log n)$

Heap binario introdotto nel 1964

shortestPath(GRAPH G, NODE s)

```
    [...]
(1) PRIORITYQUEUE Q = PriorityQueue(); Q.insert(s, 0)
    while not Q.isEmpty() do
(2)     u = Q.deleteMin()
        b[u] = false
        foreach v ∈ G.adj(u) do
            if d[u] + G.w(u, v) < d[v] then
                if not b[v] then
(3)                 Q.insert(v, d[u] + G.w(u, v))
                    b[v] = true
                else
(4)                 Q.decrease(v, d[u] + G.w(u, v))
                T[v] = u
                d[v] = d[u] + G.w(u, v)
    return (T, d)
```

Fredman-Tarjan, 1987 – Heap di Fibonacci

Costo computazionale

Riga	Costo	Ripet.
(1)	$O(n)$	1
(2)	$O(\log n)$	$O(n)$
(3)	$O(1)^{(*)}$	$O(n)$
(4)	$O(1)^{(*)}$	$O(m)$

Costo: $O(m + n \log n)$

(*) Costo ammortizzato

shortestPath(GRAPH G, NODE s)

```
[...]
(1) PRIORITYQUEUE Q = PriorityQueue(); Q.insert(s, 0)
while not Q.isEmpty() do
(2)   u = Q.deleteMin()
      b[u] = false
      foreach v ∈ G.adj(u) do
          if d[u] + G.w(u, v) < d[v] then
              if not b[v] then
(3)               Q.insert(v, d[u] + G.w(u, v))
                  b[v] = true
              else
(4)               Q.decrease(v, d[u] + G.w(u, v))
              T[v] = u
              d[v] = d[u] + G.w(u, v)
return (T, d)
```

Bellman-Ford-Moore, 1958 – Coda

Storia

- Proposto da Alfonso Shimbel nel 1955
- Pubblicato da Lester Ford, Jr. nel 1956
- Pubblicato da Edward F. Moore nel 1958
  - Shortest path faster algorithm
  - La versione che vediamo qui
- Pubblicato da Richard Bellman nel 1958
- Noto come Bellman-Ford, o Bellman-Ford-Moore

Note

- Computazionalmente più pesante di Dijkstra
- Funziona anche con archi di peso negativo

Bellman-Ford-Moore, 1958 – Coda

Linea (1): Inizializzazione

- Viene creata una coda di dimensione n
- Costo computazionale: $O(1)$

---

shortestPath(GRAPH G, NODE s) – Corpo principale

```
(1) QUEUE Q = Queue(); Q.enqueue(s)
    while not Q.isEmpty() do
(2)     u = Q.dequeue()
        b[u] = false
        foreach v ∈ G.adj(u) do
            if d[u] + G.w(u, v) < d[v] then
                [...]
    return (T, d)
```

Bellman-Ford-Moore, 1958 – Coda

Linea (2): Estrazione

- Viene estratto il prossimo elemento della coda
- Costo computazionale: $O(1)$

shortestPath(GRAPH G, NODE s) – Corpo principale

```
(1) QUEUE Q = Queue(); Q.enqueue(s)
    while not Q.isEmpty() do
(2)     u = Q.dequeue()
        b[u] = false
        foreach v ∈ G.adj(u) do
            if d[u] + G.w(u, v) < d[v] then
                [...]
    return (T, d)
```

Bellman-Ford-Moore, 1958 – Coda

Linea (3): Inserimento in coda

- Si inserisce l'indice v in coda
- Costo computazionale: $O(1)$

shortestPath(GRAPH G, NODE s) – Corpo principale

[...]
if $d[u] + G.w(u, v) < d[v]$ **then**
    if not $b[v]$ **then**
(3) Q.enqueue(v)
        $b[v] =$ **true**
    else
(4)   % Azione da svolgere nel caso v sia già presente in S
    $T[v] = u$
    $d[v] = d[u] + G.w(u, v)$
[...]

Bellman-Ford-Moore, 1958 – Coda

Linea (4): Azione nel caso v sia già presente in S

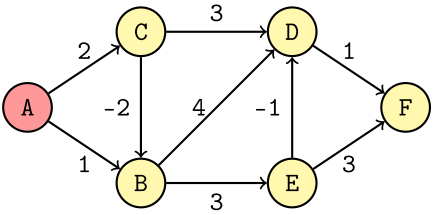
- Sezione non necessaria

shortestPath(GRAPH G, NODE s) – Corpo principale

```
[...]
if d[u] + G.w(u, v) < d[v] then
    if not b[v] then
        Q.enqueue(v)
        b[v] = true
    T[v] = u
    d[v] = d[u] + G.w(u, v)
[...]
```

(3)

Bellman-Ford-Moore, 1958 – Coda



- La prima riga contiene l'elemento estratto dalla coda
- L'ultima riga contiene lo stato della coda

		A	B	C	D	E	B	F	D	E	D	F
A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	∞	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C	∞	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
D	∞	∞	5	5	5	3	3	3	3	2	2	2
E	∞	∞	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3
F	∞	∞	∞	∞	6	6	6	6	4	4	3	3
Q	A	BC	CDE	DEB	EBF	BFD	FDE	DE	E	D	F	

Bellman-Ford-Moore, 1958 – Coda

Passata - definizione ricorsiva

- Per $k = 0$, la zeresima passata consiste nell'estrazione del nodo s dalla coda S;
- Per $k > 0$, la k-esima passata consiste nell'estrazione di tutti i nodi presenti in S al termine della passata $k-1$-esima.

Correttezza – intuizione

- Al termine della passata k, i vettori T e d descrivono i cammini minimi composti da al più k archi
- Al termine della passata $n-1$, i vettori T e d descrivono i cammini minimi (composti da al più $n-1$ archi)

Bellman-Ford-Moore, 1958 – Coda

Costo computazionale

Riga	Costo	Ripet.
(1)	$O(1)$	1
(2)	$O(1)$	$O(n^2)$
(3)	$O(1)$	$O(nm)$

Costo: $O(nm)$

Ogni nodo può essere inserito ed estratto al massimo $n-1$ volte

shortestPath(Graph G, Node s) – Corpo principale

```
(1)  Queue Q = Queue(); Q.enqueue(s)
     while not Q.isEmpty() do
(2)      u = Q.dequeue()
         b[u] = false
         foreach v ∈ G.adj(u) do
             if d[u] + G.w(u, v) < d[v] then
                 if not b[v] then
(3)                  Q.enqueue(v)
                     b[v] = true
                 T[v] = u
                 d[v] = d[u] + G.w(u, v)
     return (T, d)
```

Cammini minimi su DAG

Osservazione

I cammini minimi in un DAG sono sempre ben definiti; anche in presenza di pesi negativi, non esistono cicli negativi

Come risolvere il problema?

Cammini minimi su DAG

Osservazione

I cammini minimi in un DAG sono sempre ben definiti; anche in presenza di pesi negativi, non esistono cicli negativi

Come risolvere il problema?

È possibile rilassare gli archi in ordine topologico, una volta sola. Non essendoci cicli, non c'è modo di tornare su un nodo già visitato e abbassare il valore del suo campo d

Algoritmo

- Si utilizza l'ordinamento topologico

Cammini minimi su DAG

```
(int[], int[]) shortestPath(GRAPH G, NODE s)
int[] d = new int[1 ... G.n]          % d[u] è la distanza da s a u
int[] T = new int[1 ... G.n]   % T[u] è il padre di u nell'albero T
foreach u ∈ G.V() − {s} do
    T[u] = nil; d[u] = +∞
T[s] = nil; d[s] = 0
STACK S = topsort(G)
while not S.isEmpty() do
    u = S.pop()
    foreach v ∈ G.adj(u) do
        if d[u] + G.w(u, v) < d[v] then
            T[v] = u
            d[v] = d[u] + G.w(u, v)
return (T, d)
```

Riassunto

Complessità: quale preferire?

BFS	$O(m+n)$	Senza pesi
Dijkstra	$O(n^2)$	Pesi positivi, grafi densi
Johnson	$O(m \log n)$	Pesi positivi, grafi sparsi
Fredman-Tarjan	$O(m + n \log n)$	Pesi positivi, grafi densi, dimensioni molto grandi
Bellman-Ford	$O(mn)$	Pesi negativi
	$O(m+n)$	DAG
Bernstein,Nanongkai Wullf-Nilsen (2022)	$O(m \log^8 n \log W)$	Pesi negativi, interi

Sommario

Cammini minimi, sorgente multipla

Possibili soluzioni

Input	**Complessità**	**Approccio**
Pesi positivi, grafo denso	$O(n \cdot n^2)$	Applicazione ripetuta dell'algoritmo di Dijkstra
Pesi positivi, grafo sparso	$O(n \cdot (m \log n))$	Applicazione ripetuta dell'algoritmo di Johnson
Pesi negativi	$O(n \cdot nm)$	Applicazione ripetuta di Bellman-Ford, sconsigliata
Pesi negativi, grafo denso	$O(n^3)$	Algoritmo di Floyd e Warshall
Pesi negativi, grafo sparso	$O(nm \log n)$	Algoritmo di Johnson per sorgente multipla

Floyd-Warshall, 1962

Cammini minimi k-vincolati

Sia k un valore in $\{0, \ldots, n\}$. Diciamo che un cammino p_{xy}^k è un cammino minimo k-vincolato fra x e y se esso ha il costo minimo fra tutti i cammini fra x e y che non passano per nessun vertice in $v_{k+1}, \ldots, v_n$ (x e y sono esclusi dal vincolo).

Note

Assumiamo (come abbiamo sempre fatto) che esista un ordinamento fra i nodi del grafo $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Domande

- A cosa corrisponde p_{xy}^0?
- A cosa corrisponde p_{xy}^n?

Floyd-Warshall, 1962

Distanza k-vincolata

Denotiamo con $d^k[x][y]$ il costo totale del cammino minimo k-vincolato fra x e y, se esiste.

$$d^k[x][y] = \begin{cases} w(p^k_{xy}) & \text{se esiste } p^k_{xy} \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Domande

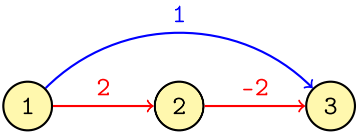
- A cosa corrisponde $d^0[x][y]$?
- A cosa corrisponde $d^n[x][y]$?

Floyd-Warshall, 1962

Formulazione ricorsiva

$$d^k[x][y]) = \begin{cases} w(x,y) & k = 0 \\ & k > 0 \end{cases}$$

Esempio



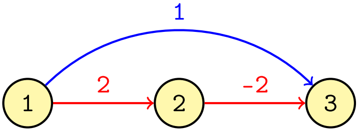
$$\begin{aligned} d^0[1][3] &= \\ d^1[1][3] &= \\ d^2[1][3] &= \\ &= \end{aligned}$$

Floyd-Warshall, 1962

Formulazione ricorsiva

$$d^k[x][y]) = \begin{cases} w(x,y) & k = 0 \\ \min(d^{k-1}[x][y], d^{k-1}[x][k] + d^{k-1}[k][y]) & k > 0 \end{cases}$$

Esempio



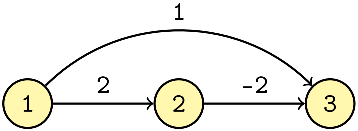
$$\begin{aligned} d^0[1][3] &= 1 \\ d^1[1][3] &= 1 \\ d^2[1][3] &= \min(d^1[1][3], d^1[1][2] + d^1[2][3]) \\ &= \min(1,0) = 0 \end{aligned}$$

Floyd-Warshall, 1962

Matrice dei padri

Oltre a definire la matrice d, calcoliamo una matrice T dove $T[x][y]$ rappresenta il predecessore di y nel cammino più breve da x a y.

Esempio



$$T[1][2] = 1$$
$$T[2][3] = 2$$
$$T[1][3] = 2$$

Floyd-Warshall, programmazione dinamica

$(\textbf{int}[\,][\,], \textbf{int}[\,][\,])$ floydWarshall($\textsc{Graph}$ G)

```
int[][] d = new int[1...n][1...n]
int[][] T = new int[1...n][1...n]
foreach u, v ∈ G.V() do
    d[u][v] = +∞
    T[u][v] = nil
foreach u ∈ G.V() do
    foreach v ∈ G.adj(u) do
        d[u][v] = G.w(u, v)
        T[u][v] = u
```

Floyd-Warshall, programmazione dinamica

```
(int[][], int[][]) floydWarshall(GRAPH G)
[...]
for k = 1 to G.n do
    foreach u ∈ G.V() do
        foreach v ∈ G.V() do
            if d[u][k] + d[k][v] < d[u][v] then
                d[u][v] = d[u][k] + d[k][v]
                T[u][v] = T[k][v]
return (d, T)
```

Chiusura transitiva (Algoritmo di Warshall)

Chiusura transitiva

La chiusura transitiva $G^* = (V, E^*)$ di un grafo $G = (V, E)$ è il grafo orientato tale che $(u, v) \in E^*$ se e solo esiste un cammino da u a v in G.

Supponendo di avere il grafo G rappresentato da una matrice di adiacenza M, la matrice M^n rappresenta la matrice di adiacenza di G^*.

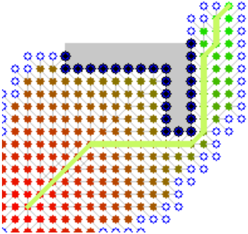
Formulazione ricorsiva

$$M^k[x][y]) = \begin{cases} M[x][y] & k = 0 \\ M^{k-1}[x][y] \textbf{ or } (M^{k-1}[x][k] \textbf{ and } M^{k-1}[k][y]) & k > 0 \end{cases}$$

Sommario

Conclusione

- Abbiamo visto una panoramica dei più importanti algoritmi per la ricerca dei cammini minimi
- Ulteriori possibilità:
  - A*, un algoritmo che utilizza euristiche per velocizzare la ricerca
  - Algoritmi specializzati per reti stradali



https://en.wikipedia.org/wiki/A*_search_algorithm#/media/File:Astar_progress_animation.gif