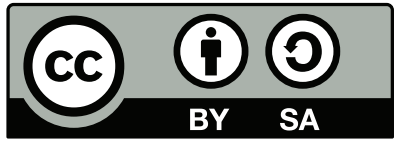
Algoritmi e Strutture Dati

Tecniche risolutive per problemi intrattabili

Alberto Montresor

Università di Trento

2023/05/04



Sommario

Chi si accontenta, gode

Proverbio

Le mieux est l'ennemi du bien
Il meglio è nemico del bene

Voltaire, La Bégueule, 1772

Introduzione

Non si può avere tutto dalla vita; bisogna rinunciare a qualcosa:

- Generalità:
  - Algoritmi pseudo-polinomiali che sono efficienti solo per alcuni casi particolari dell'input
- Ottimalità:
  - Algoritmi di approssimazione, che garantiscono di ottenere soluzioni "vicine" alla soluzione ottimale
- Formalità:
  - Algoritmi euristici, di solito basati su tecniche greedy o di ricerca locale, che forniscono sperimentalmente risultati buoni
- Efficienza:
  - Algoritmi esponenziali branch-&-bound, che limitano lo spazio di ricerca con un'accurata potatura

Esempio: Subset-Sum

Somma di sottoinsieme (SUBSET-SUM)

Dati un vettore A contenente n interi positivi ed un intero positivo k, esiste un sottoinsieme $S \subseteq \{1 \dots n\}$ tale che $\sum_{i \in S} a[i] = k$?

- Utilizzando backtracking, abbiamo risolto la versione di ricerca di questo problema
- Quella appena enunciata è la versione decisionale
- Per semplificare il confronto, ci concentriamo sulla seconda

Subset Sum – Programmazione Dinamica

Definiamo una tabella booleana $DP[0 \ldots n][0 \ldots k]$.

$DP[i][r]$ è uguale a **true** se esiste un sottoinsieme dei primi i valori memorizzati in A la cui somma è pari a r, **false** altrimenti.

$$DP[i][r] = \begin{cases} \textbf{true} & r = 0 \\ \textbf{false} & r > 0 \wedge i = 0 \\ DP[i-1][r] & r > 0 \wedge i > 0 \wedge A[i] > r \\ DP[i-1][r] \textbf{ or } DP[i-1][r - A[i]] & r > 0 \wedge i > 0 \wedge A[i] \leq r \end{cases}$$

Subset Sum – Programmazione dinamica – $\Theta(nk)$

```
boolean subsetSum(int[] A, int n, int k)
boolean[][] DP = new boolean[0...n][0...k] = {false}
for i = 0 to n do
    DP[i][0] = true                                  % Obiettivo raggiunto
for r = 1 to k do
    DP[0][r] = false                                 % Valori terminati
for i = 1 to n do
    for r = 1 to A[i] − 1 do
        DP[i][r] = DP[i − 1][r]                      % Valore troppo grande
    for r = A[i] to k do
        DP[i][r] = DP[i − 1][r] or DP[i − 1][r − A[i]]   % Valore ok
return DP[n][k]
```

Subset Sum – Programmazione dinamica – $\Theta(nk)$

Esempio

$$A = [5, 9, 10]$$
$$n = 3$$
$$k = 24$$

i \ r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	A
0	1	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	
1	1	∘	∘	∘	∘	1	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	5
2	1	∘	∘	∘	∘	1	∘	∘	∘	1	∘	∘	∘	∘	1	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	9
3	1	∘	∘	∘	∘	1	∘	∘	∘	1	1	∘	∘	∘	1	1	∘	∘	∘	1	∘	∘	∘	∘	1	10

Subset Sum – Backtracking – $O(2^n)$

```
boolean ssRec(int[] A, int i, int r)
if r == 0 then
    return true                                   % Obiettivo raggiunto
else if i == 0 then
    return false                                  % Valori terminati
else if A[i] > r then
    return ssRec(A, i − 1, r)                     % Valore troppo grande
else
    return ssRec(A, i − 1, r) or ssRec(A, i − 1, r − A[i])   % Valore ok
```

	r																								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	A
0	1	◦	◦	◦	◦	0	◦	◦	◦	0	0	◦	◦	◦	0	0	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	0	
1	◦	◦	◦	◦	◦	1	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	0	0	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	0	5
2	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	1	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	0	9
3	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	1	10

i

Subset Sum – Memoization – $O(nk)$, $O(2^n)$

boolean ssRec(**int**[] A, **int** i, **int** r, DICTIONARY DP)

```
if r == 0 then
    return true                                   % Obiettivo raggiunto
else if i == 0 then
    return false                                  % Valori terminati
else
    boolean res = DP.lookup(⟨i, r⟩)
    if res == nil then
        res = ssRec(A, i − 1, r, DP)              % Valore non preso
        if A[i] < r then
            res = res or ssRec(A, i − 1, r − A[i], DP)   % Valore preso
        DP.insert((i, r), res)
    return res
```

Subset Sum – Memoization – $O(nk)$, $O(2^n)$

i \ r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	A
0	1	◦	◦	◦	◦	0	◦	◦	◦	0	0	◦	◦	◦	0	0	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	0	
1	◦	◦	◦	◦	◦	1	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	0	0	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	0	5
2	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	1	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	0	9
3	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	1	10

Esempio

$$A = [1, 1, 1, 1, 1]$$

$$n = 5$$

$$k = 5$$

i \ r	0	1	2	3	4	5	A
0	1	0	0	0	0	0	
1		1	0	0	0	0	1
2			1	0	0	0	1
3				1	0	0	1
4					1	0	1
5						1	1

Complessità – Riassunto

Programmazione dinamica	$\Theta(nk)$
Backtracking	$O(2^n)$
Memoization con dizionario	$O(nk), O(2^n)$

Dynamic Programming, Memoization ≡ "Careful brute force"

Erik Demeine

Complessità – Discussione

$O(nk)$ è una complessità polinomiale?

- No, k è parte dell'input, non una dimensione dell'input
- k viene rappresentato da $t = \lceil \log k \rceil$ cifre binarie
- Quindi la complessità è $O(nk) = O(n \cdot 2^t)$, esponenziale

Problemi fortemente, debolmente NP-completi

Dimensioni del problema

Dato un problema decisionale R e una sua istanza I:

- La dimensione d di I è la lunghezza della stringa che codifica I
- Il valore $\#$ è il più grande numero intero che appare in I

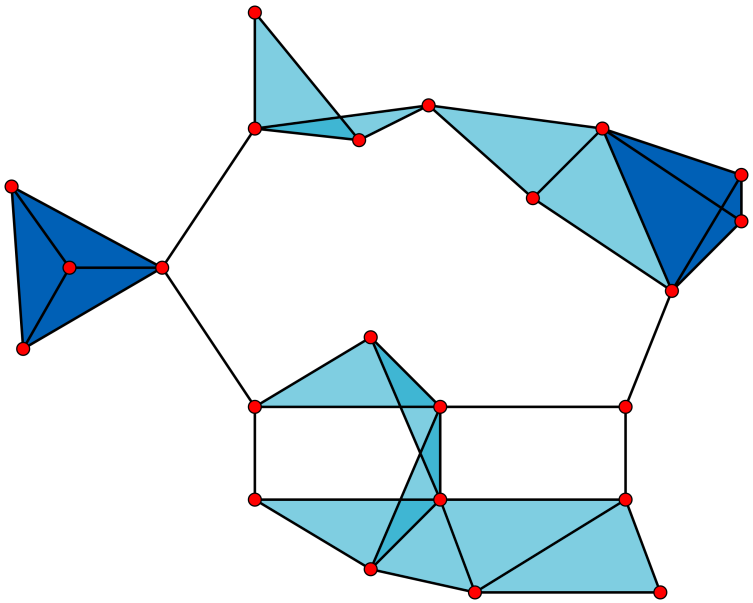
Esempi

Nome	I	$\#$	d
SUBSET-SUM	$\{n, k, A\}$	$\max\{n, k, \max(A)\}$	$O(n \log \#)$
CLIQUE			
TSP			

Esempio: Cricca

Cricca (CLIQUE)

Dati un grafo non orientato ed un intero k, esiste un sottoinsieme di almeno k nodi tutti mutuamente adiacenti?

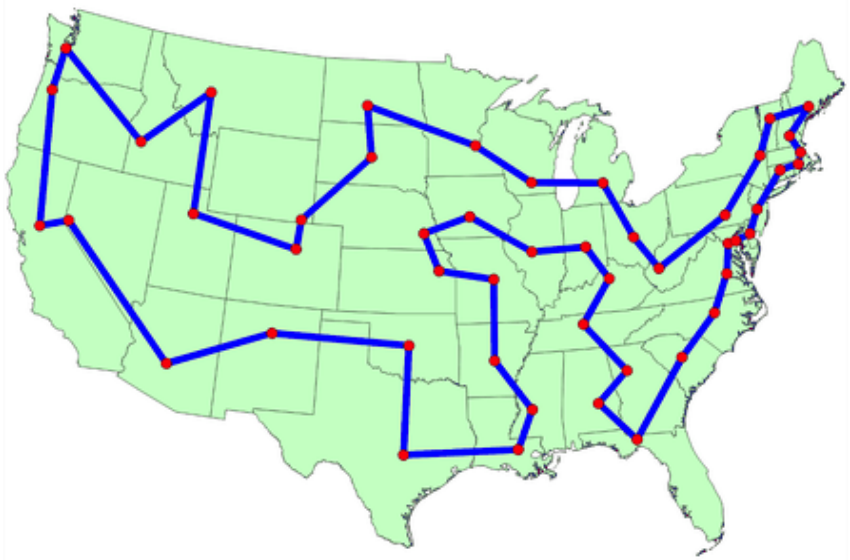


https://en.wikipedia.org/wiki/Clique_(graph_theory)

Esempio: Commesso viaggiatore

Commesso viaggiatore (Traveling salesperson - TSP)

Date n città e una matrice simmetrica d di distanze positive, dove $d[i][j]$ è la distanza fra i e j, trovare un percorso che, partendo da una qualsiasi città, attraversi ogni città esattamente una volta e ritorni alla città di partenza, in modo che la distanza totale percorsa sia minima.



https://optimization.mccormick.northwestern.edu/images/e/ea/48StatesTSP.png

Problemi fortemente, debolmente NP-completi

Dimensioni del problema

Dato un problema decisionale R e una sua istanza I:

- La dimensione d di I è la lunghezza della stringa che codifica I
- Il valore $\#$ è il più grande numero intero che appare in I

Esempi

Nome	I	$\#$	d
SUBSET-SUM	$\{n, k, A\}$	$\max\{n, k, \max(A)\}$	$O(n \log \#)$
CLIQUE	$\{n, m, k, G\}$	$\max\{n, m, k\}$	$O(n + m + \log \#)$
TSP	$\{n, k, d\}$	$\max\{n, k, \max(d)\}$	$O(n^2 \log \#)$

Problemi fortemente, debolmente NP-completi

Definizione

Sia R_{pol} il problema R ristretto ai dati d'ingresso per i quali $\#$ è limitato superiormente da $T_p(d)$, con T_p funzione polinomiale in d. R è fortemente NP-completo se e solo se R_{pol} è NP-completo

Definizione

Se un problema NP-completo non è fortemente NP-completo, allora è debolmente NP-completo.

Esempio: Problema debolmente NP-completo

Somma di sottoinsieme (SUBSET-SUM

Dati un vettore A contenente n interi positivi ed un intero positivo k, esiste un sottoinsieme $S \subseteq \{1 \dots n\}$ tale che $\sum_{i \in S} a[i] = k$?

Esempio: SUBSET-SUM è debolmente NP-completo

- $\forall A[i] \leq k$ (valori più grandi di k vanno esclusi)
- Se $k = O(n^c)$, allora $\# = \max\{n, k, a_1, \dots, a_n\} = O(n^c)$
- La soluzione basata su programmazione dinamica ha complessità $O(nk) = O(n^{c+1})$, quindi in $\mathbb{P}$.
- Quindi SUBSET-SUM non è fortemente NP-completo

Algoritmi pseudo-polinomiali

Definizione

Un algoritmo ha complessità pseudo-polinomiale se risolve un certo problema R, per qualsiasi dato I d'ingresso, in tempo $T_p(\#, d)$, funzione con tempo polinomiale (non costante) in $\#$.

Esempio

Gli algoritmi per SUBSET-SUM e KNAPSACK sono pseudo-polinomiali.

Teorema

Nessun problema fortemente $\mathbb{NP}$-completo può essere risolto da un algoritmo pseudo-polinomiale, a meno che non sia $\mathbb{P} = \mathbb{NP}$.

Esempio: Problema fortemente NP-completo

Cricca (CLIQUE)

Dati un grafo non orientato ed un intero k, esiste un sottoinsieme di almeno k nodi tutti mutuamente adiacenti?

CLIQUE è fortemente NP-completo

- $k \leq n$ (altrimenti la risposta è **false**)
- $\# = \max\{n, m, k\} = \max\{n, m\}$
- $d = O(n + m + \log \#) = O(n + m)$
- Quindi $\# = \max\{n, m\}$ è già limitato superiormente da $O(n + m)$
- Il problema ristretto è identico a CLIQUE, che è NP-completo

Esempio: Problema fortemente NP-completo

Commesso viaggiatore (Traveling salesperson - TSP)

Date n città e una matrice simmetrica d di distanze positive, dove $d[i][j]$ è la distanza fra i e j, trovare un percorso che, partendo da una qualsiasi città, attraversi ogni città esattamente una volta e ritorni alla città di partenza, in modo che la distanza totale percorsa sia minima.

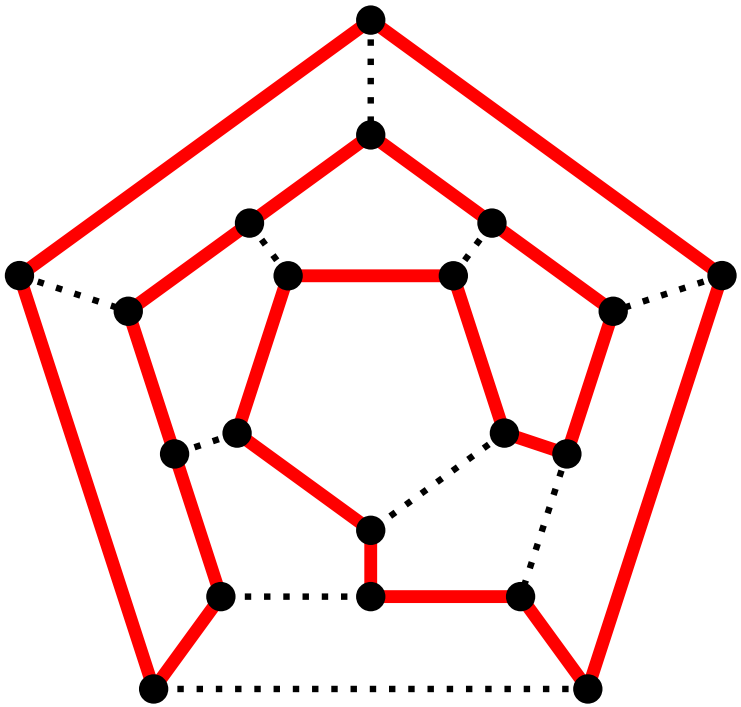
TSP è fortemente NP-completo

- Per assurdo, supponiamo TSP sia debolmente NP-completo
- Allora esiste una soluzione pseudo-polinomiale
- Usiamo questa soluzione per risolvere un problema NP-completo in tempo polinomiale - assurdo a meno che $\mathbb{P} = \mathbb{NP}$

Circuito hamiltoniano

Circuito hamiltoniano (HAMILTONIAN-CIRCUIT)

Dato un grafo non orientato G, esiste un circuito che attraversi ogni nodo una e una sola volta?



https://en.wikipedia.org/wiki/Hamiltonian_path#/media/File:Hamiltonian_path.svg

Complessità

- HAMILTONIAN-CIRCUIT è $\mathbb{NP}$-completo
- È uno dei 21 problemi elencati nell'articolo di Karp

Esempio: Problema fortemente NP-completo

Dimostriamo che TSP è fortemente NP-completo

- Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato
- Definiamo una matrice di distanze a partire da G

$$d[i][j] = \begin{cases} 1 & (i,j) \in E \\ 2 & (i,j) \notin E \end{cases}$$

- Il grafo G ha un circuito hamiltoniano se e solo se è possibile trovare un percorso da commesso viaggiatore di costo n
- Se esistesse un algoritmo pseudopolinomiale A per TSP, HAMILTONIAN CIRCUIT potrebbe essere risolto da A in tempo polinomiale

Problemi debolmente/fortemente NP-completi?

Partizione (PARTITION)

Dato un vettore A contenente n interi positivi, esiste un sottoinsieme $S \subseteq \{1 \dots n\}$ tale che $\sum_{i \in S} A[i] = \sum_{i \notin S} A[i]$?

Esempio

14	6	12	3	7	2

Domanda – PARTITION è debolmente NP-completo?

È possibile ridurlo a SUBSET-SUM scegliendo come valore k la metà di tutti i valori presenti:

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{n} A[i]}{2} = \frac{44}{2} = 22$$

Problemi debolmente/fortemente NP-completi?

Partizione (PARTITION)

Dato un vettore A contenente n interi positivi, esiste un sottoinsieme $S \subseteq \{1 \dots n\}$ tale che $\sum_{i \in S} A[i] = \sum_{i \notin S} A[i]$?

Esempio

Domanda – PARTITION è debolmente NP-completo?

Poichè è possibile risolverlo tramite un algoritmo pseudo-polinomiale, PARTITION è debolmente NP-completo

Problemi debolmente/fortemente NP-completi?

3-Partizione (3-PARTITION)

Dati $3n$ interi $\{a_1, \ldots, a_{3n}\}$, esiste una partizione in n triple $T_1, \ldots, T_n$, tale che la somma dei tre elementi di ogni T_j è la stessa, per $1 \leq j \leq n$?

Domanda – 3-PARTITION è debolmente NP-completo?

No, non esiste un algoritmo pseudo-polinomiale per risolvere 3-partition.

Algoritmi di approssimizzazione

Premessa

- I problemi più interessanti sono in forma di ottimizzazione
- Se il problema decisionale è $\mathbb{NP}$-completo, non sono noti algoritmi polinomiali per il problema di ottimizzazione
- Esistono algoritmi polinomiali che trovano soluzioni ammissibili più o meno vicine a quella ottima

Algoritmi di approssimazione

Se è possibile dimostrare un limite superiore/inferiore al rapporto fra la soluzione trovata e la soluzione ottima, allora tali algoritmi vengono detti algoritmi di approssimazione.

Approssimazione

Definizione

Dato un problema di ottimizzazione con funzione costo non negativa c, un algoritmo si dice di $\alpha(n)$-approssimazione se fornisce una soluzione ammissibile x il cui costo $c(x)$ non si discosta dal costo $c(x^*)$ della soluzione ottima x^* per più di un fattore $\alpha(n)$, per qualunque input di dimensione n:

$$c(x^*) \leq c(x) \leq \alpha(n)c(x^*) \quad \alpha(n) > 1 \quad \text{(Minimizzazione)}$$
$$\alpha(n)c(x^*) \leq c(x) \leq c(x^*) \quad \alpha(n) < 1 \quad \text{(Massimizzazione)}$$

- $\alpha(n)$ può essere una costante, valida per tutti gli n
- Identificare un valore $\alpha(n)$ e dimostrare che l'algoritmo lo rispetta è ciò che rende un buon algoritmo un algoritmo di approssimazione

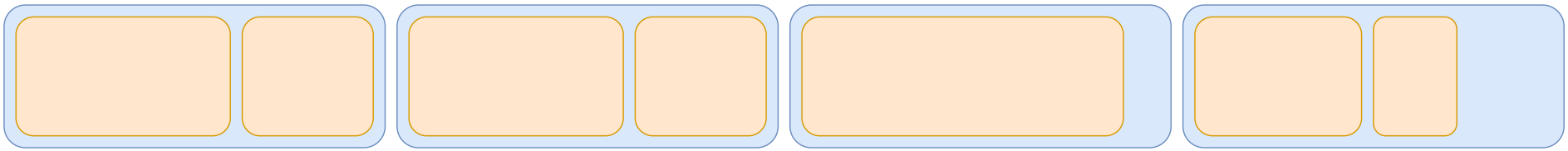
Bin-packing approssimato

Bin packing

Dati:

- un vettore A contenente n interi positivi
  (i volumi degli oggetti)
- un intero positivo k
  (la capacità di una scatola, tale che $\forall i : A[i] \leq k$),

si vuole trovare una partizione di $\{1, \ldots, n\}$ nel minimo numero di sottoinsiemi disgiunti ("scatole") tali che $\sum_{i \in S} A[i] \leq k$ per ogni insieme S della partizione



Bin-packing approssimato

Esempio – $k = 8$

3	7	2	5	4	3	5

Esempio – $k = 10$

3	2	7	5	3	5	10	5

Esercizi

- Provate a risolvere questi esempi "a mano"
- Ragionate su possibili algoritmi

First-fit

Algoritmo FIRST-FIT (Greedy)

Gli oggetti sono considerati in un ordine qualsiasi e ciascun oggetto è assegnato alla prima scatola che lo può contenere, tenuto conto di quanto spazio è stato occupato della stessa.

Esempio

3	7	2	5	4	3	5

$k = 8$

3, 2, 3	7	5	4	5

Approssimazione First-Fit

- Sia $N > 1$ il numero di scatole usate da FIRST-FIT (se $N = 1$, FIRST-FIT è ottimale)
- Il numero minimo di scatole N^* è limitato da:

$$N^* \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} A[i]}{k} = \frac{29}{8} = 3.625$$

- Non possono esserci due scatole riempite meno della metà:

$$N < \frac{\sum_{i=1}^{n} A[i]}{k/2} = \frac{29}{8/2} = 7.250$$

- Abbiamo quindi:

$$N < \frac{\sum_{i=1}^{n} A[i]}{k/2} = 2\frac{\sum_{i=1}^{n} A[i]}{k} \leq 2N^* = \alpha(n)N^*$$

che implica $\alpha(n) = 2$

Approssimazione First-Fit

- È possibile dimostrare un risultato migliore per First Fit:

$$N < \frac{17}{10}N^* + 2$$

- Variante First-fit decreasing: gli oggetti sono considerati in ordine non decrescente

$$N < \frac{11}{9}N^* + 4$$

- Queste sono dimostrazioni di limiti superiori per il fattore $\alpha(n)$, per casi particolari l'approssimazione può essere migliore

Commesso viaggiatore con disuguaglianze particolari

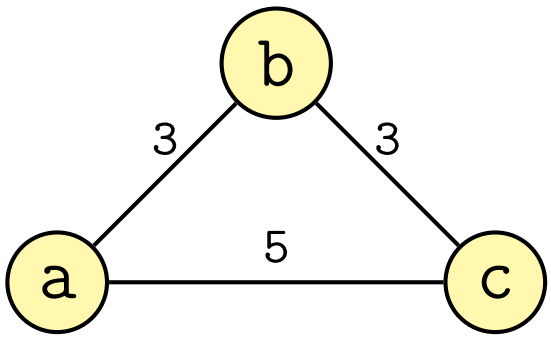
Commesso viaggiatore con dis. triangolari (Δ-TSP)

Siano date n città e le distanze (positive) $d[i][j]$ tra esse, tali per cui vale la regola delle diseguaglianze triangolari:

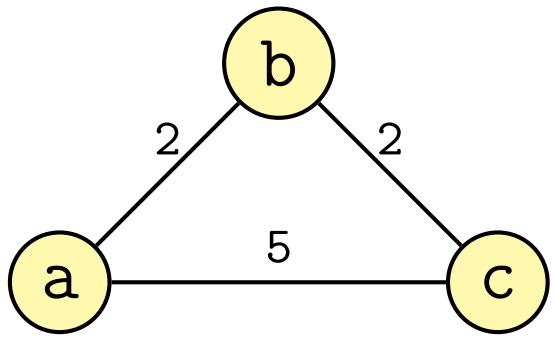
$$d[i][j] \leq d[i][k] + d[k][j] \quad \forall i, j, k : \quad 1 \leq i, j, k \leq n$$

Trovare un percorso che, partendo da una qualsiasi città, attraversi ogni città esattamente una volta e ritorni alla città di partenza, in modo che la distanza complessiva percorsa sia minima.

Con diseguaglianza triangolare



Senza diseguaglianza triangolare



Δ-TSP è $\mathbb{NP}$-completo

Lemma

HAMILTONIAN-CIRCUIT $\leq_p$ Δ-TSP

Dimostrazione

- Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato
- Definiamo una matrice di distanze a partire da G:

$$d[i][j] = \begin{cases} 1 & (i,j) \in E \\ 2 & (i,j) \notin E \end{cases}$$

- Diseguaglianze triangolari: $d[i][j] \leq 2 \leq d[i][k] + d[k][j]$
- G ha un circuito hamiltoniano $\Leftrightarrow$
  esiste un percorso Δ-TSP in d di lunghezza n

Δ-TSP è $\mathbb{NP}$-completo

Lemma

HAMILTONIAN-CIRCUIT $\leq_p$ Δ-TSP

Teorema

Δ-TSP è $\mathbb{NP}$-completo

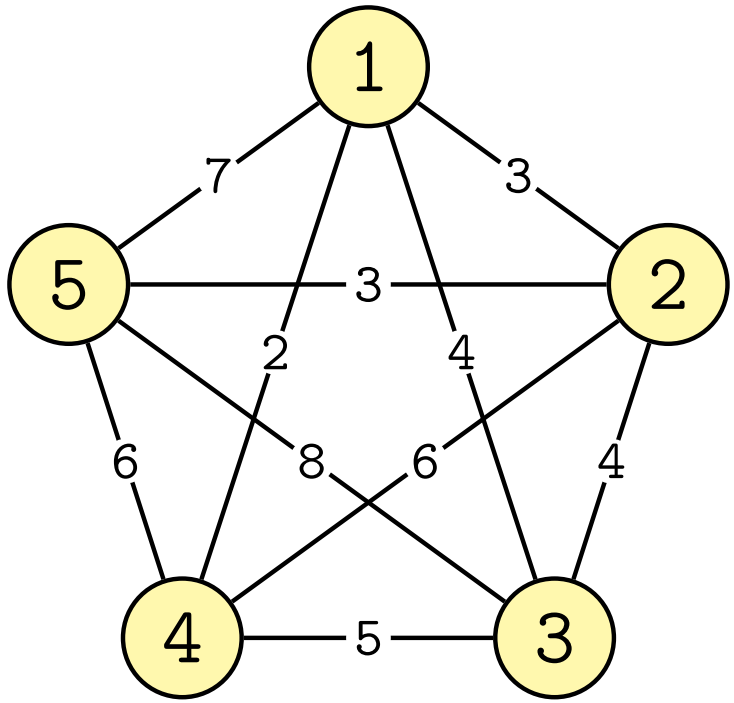
Dimostrazione

Poiché HAMILTONIAN-CIRCUIT (un problema $\mathbb{NP}$-completo) è riducibile a Δ-TSP, ne segue che Δ-TSP è NP-completo.

Commesso viaggiatore vs circuito hamiltoniano pesato

- Interpretiamo (Δ)-TSP come il problema di trovare un circuito hamiltoniano di peso minimo su un grafo completo

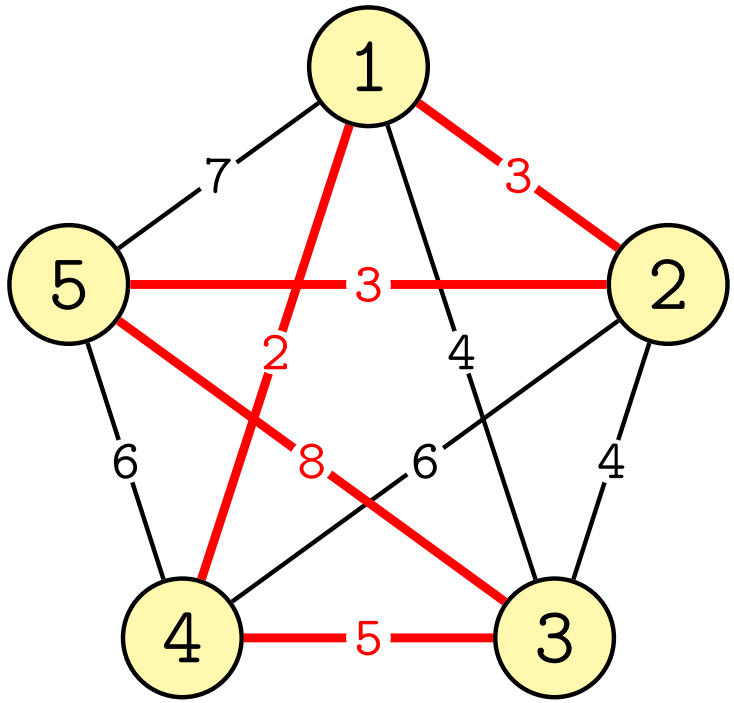
	1	2	3	4	5
1		3	4	2	7
2	3		4	6	3
3	4	4		5	8
4	2	6	5		6
5	7	3	8	6	



Commesso viaggiatore vs circuito hamiltoniano pesato

- Interpretiamo (Δ)-TSP come il problema di trovare un circuito hamiltoniano di peso minimo su un grafo completo

	1	2	3	4	5
1		3	4	2	7
2	3		4	6	3
3	4	4		5	8
4	2	6	5		6
5	7	3	8	6	

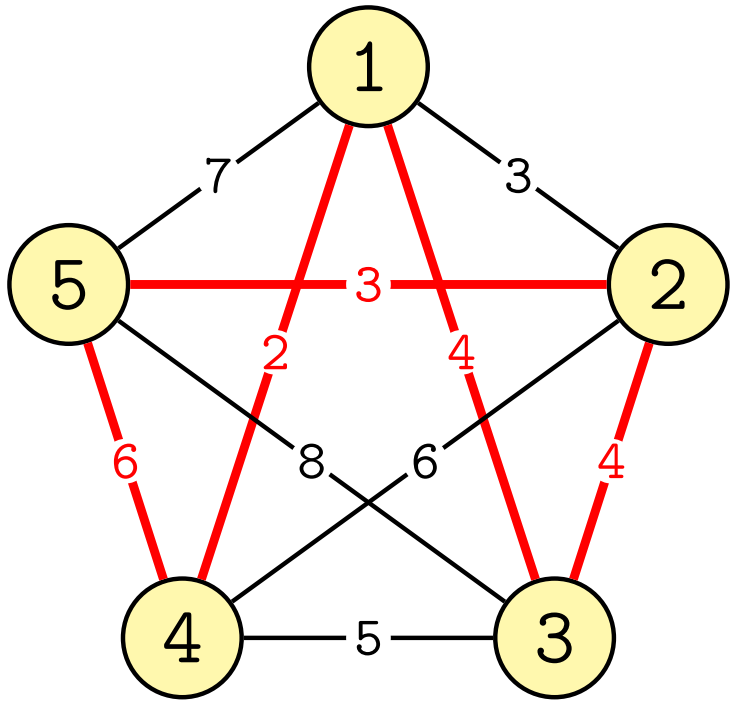


Costo: 21

Commesso viaggiatore vs circuito hamiltoniano pesato

- Interpretiamo (Δ)-TSP come il problema di trovare un circuito hamiltoniano di peso minimo su un grafo completo

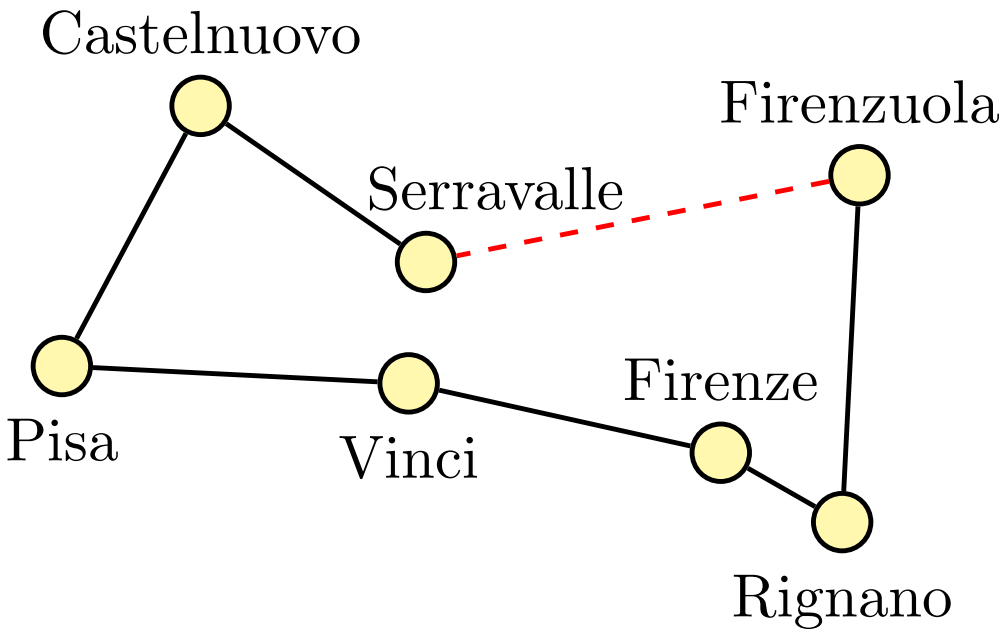
	1	2	3	4	5
1		3	4	2	7
2	3		4	6	3
3	4	4		5	8
4	2	6	5		6
5	7	3	8	6	



Costo: 19

Algoritmo di approssimazione per Δ-TSP

- Interpretiamo Δ-TSP come il problema di trovare un circuito hamiltoniano di peso minimo su un grafo completo
- Si consideri un circuito hamiltoniano e si cancelli un suo arco
- Si ottiene un albero di copertura



Algoritmo di approssimazione per Δ-TSP

Teorema

Qualunque circuito hamiltoniano π ha costo $c(\pi)$ superiore al costo mst di un albero di copertura di peso minimo, ovvero $mst < c(\pi)$

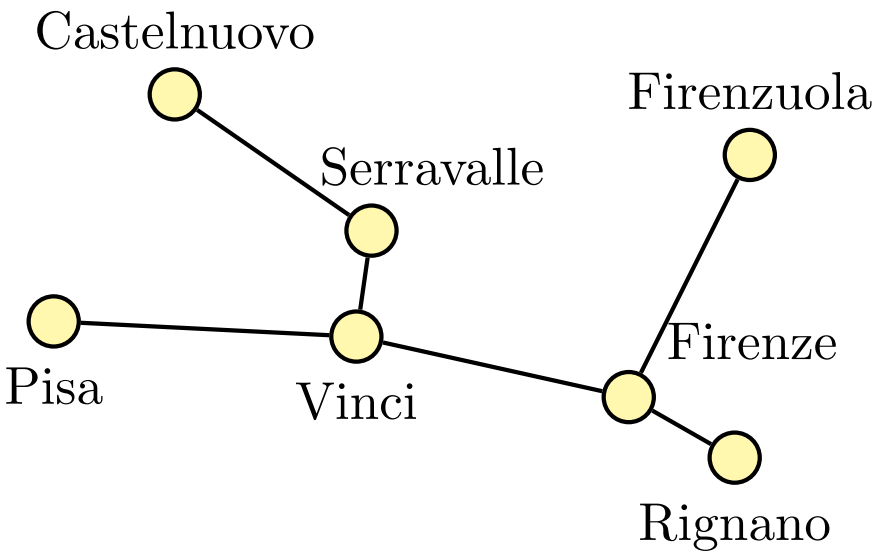
Dimostrazione

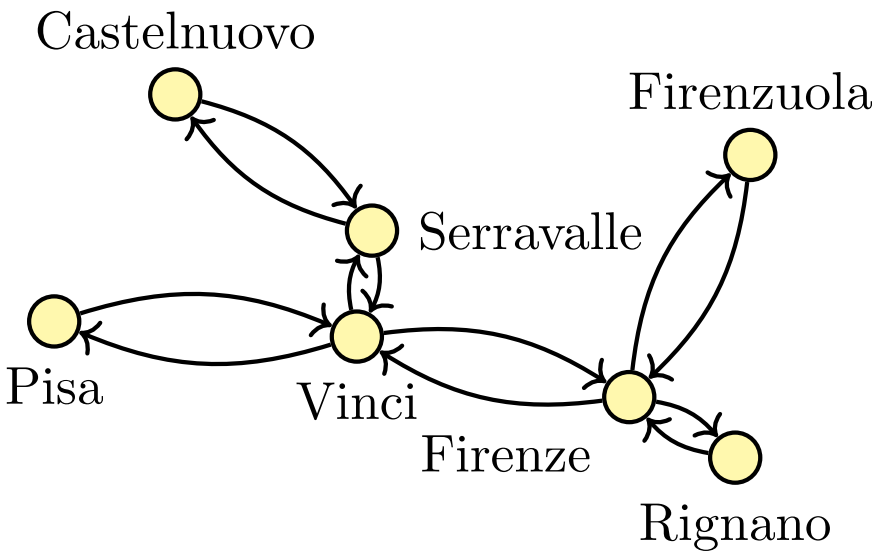
Per assurdo

- Supponiamo che esista un circuito hamiltoniano π di costo $c(\pi) \leq mst$
- Togliamo un arco, otteniamo un albero di copertura con peso inferiore $mst' < c(\pi) \leq mst$
- Contraddizione, visto che mst è il costo minimo fra tutti gli alberi di copertura

Algoritmo per Δ-TSP

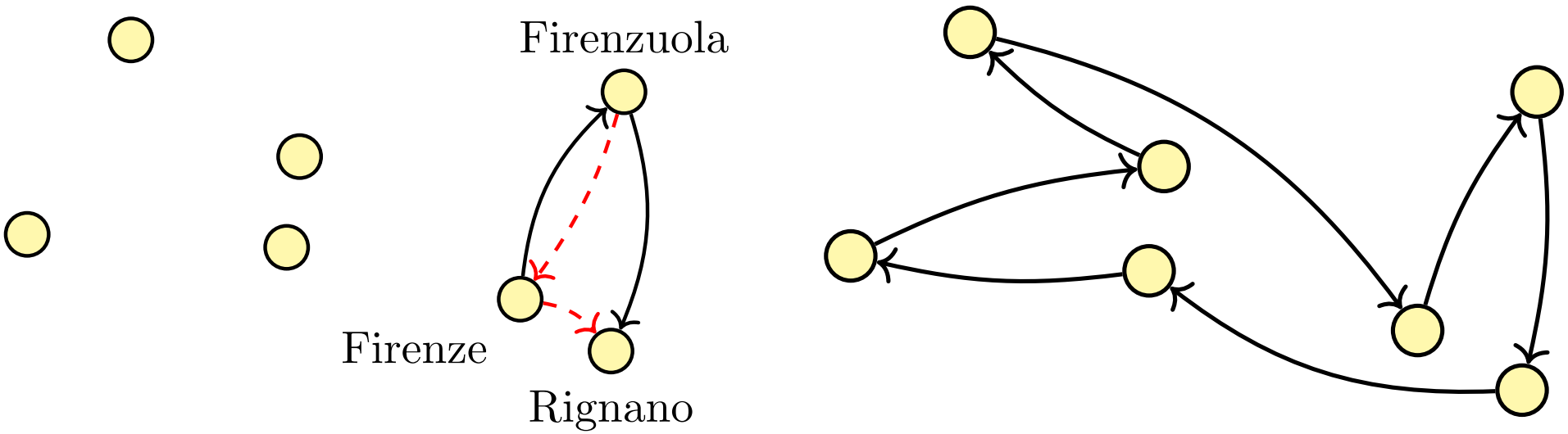
- Si individua un minimo albero di copertura di peso *mst* e se ne percorrono gli archi due volte, prima in un senso e poi nell'altro
- In questo modo, si visita ogni città almeno una volta
- La distanza complessiva di tale circuito è uguale a $2 \cdot mst$
- Ma non è un circuito hamiltoniano!





Algoritmo per Δ-TSP

- Si evita di passare per città già visitate - si saltano
- Per la disuguaglianza triangolare, il costo $c(\pi)$ del circuito così ottenuto è inferiore o uguale a $2 \cdot mst$
- Quindi: $c(\pi) \leq 2 \cdot mst < 2 \cdot c(\pi^*) \quad \Rightarrow \quad \alpha(n) = 2$
  dove $c(\pi^*)$ è il costo del circuito hamiltoniano ottimo



Algoritmo per Δ-TSP

- La complessità dell'algoritmo è pari a $O(n^2 \log n)$:
  - $O(n^2 \log n)$ per algoritmo di Kruskal
  - $O(n)$ per visita in profondità del MST raddoppiato con $2n$ archi
- Esistono grafi "perversi" per cui il fattore di approssimazione tende al valore 2
- L'algoritmo di Christofides (1976) ha un fattore di approssimazione di 3/2, il migliore risultato al momento...
- Anna R. Karlin, Nathan Klein, Shayan Oveis Gharan. A (Slightly) Improved Approximation Algorithm for Metric TSP. STOC'21, best paper award. "For some $\epsilon > 10^{-36}$, we give a $3/2 - \epsilon$ approximation algorithm for metric TSP."

Non approssimabilità di TSP

Teorema

Non esiste alcun algoritmo di $\alpha(n)$-approssimazione per TSP tale che $c(x') \leq sc(x^*)$, con s intero positivo, a meno che non sia $\mathbb{P} = \mathbb{NP}$.

Dimostrazione

Per chi è interessato, nel libro.

Algoritmi euristici

Euristiche

Quando si è presi dalla disperazione a causa della enorme difficoltà di un problema di ottimizzazione NP-hard, si può ricorrere ad algoritmi "euristici" che forniscono una soluzione ammissibile

- non necessariamente ottima
- non necessariamente approssimata

Dal greco antico $\epsilon\upsilon\rho\iota\sigma\kappa\omega$ (eurisko), "Trovare, scoprire"

Tecniche possibili

- Greedy
- Ricerca locale

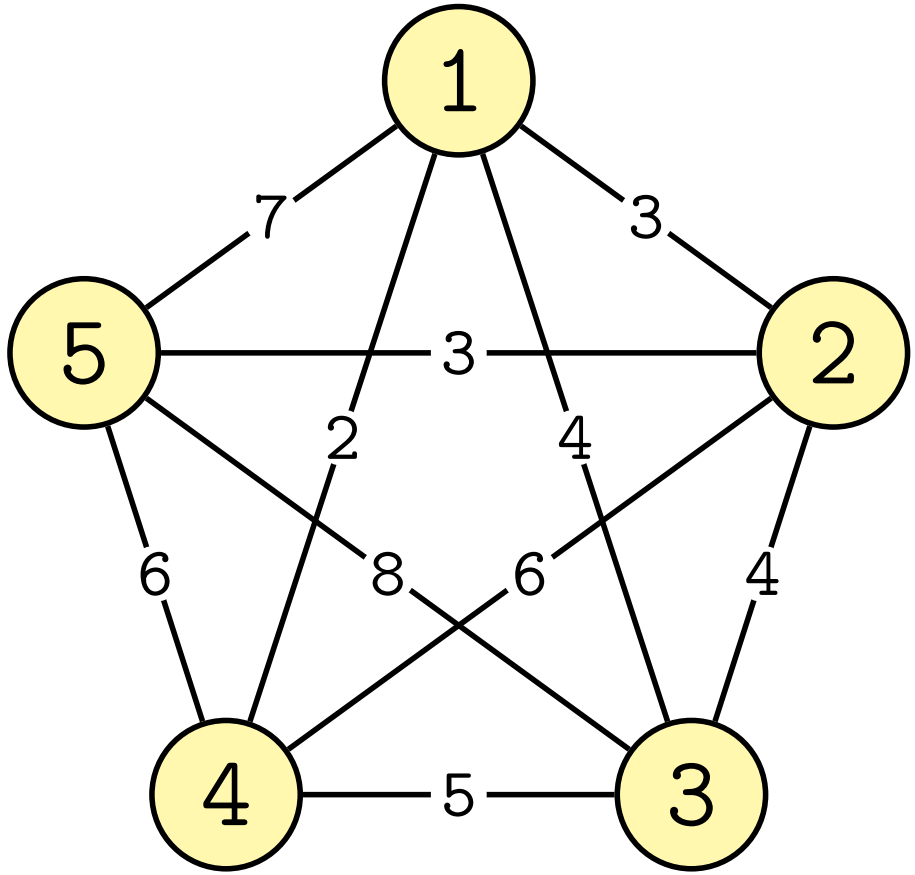
TSP – Greedy (1)

Shortest edges first

- Ordiniamo gli archi per pesi non decrescenti
- Aggiungiamo archi alla soluzioni seguendo questo ordine finché non sono stati aggiunti $n-1$ archi, dove n è il numero di nodi.
- Per poter aggiungere un arco, occorre verificare che:
  - per ciascuno dei suoi nodi non siano stati già scelti due archi
  - che non si formino circuiti (MFSET)
- A questo punto, si è trovata una catena Hamiltoniana
- Si chiude il circuito aggiungendo l'arco tra i due nodi estremi della catena

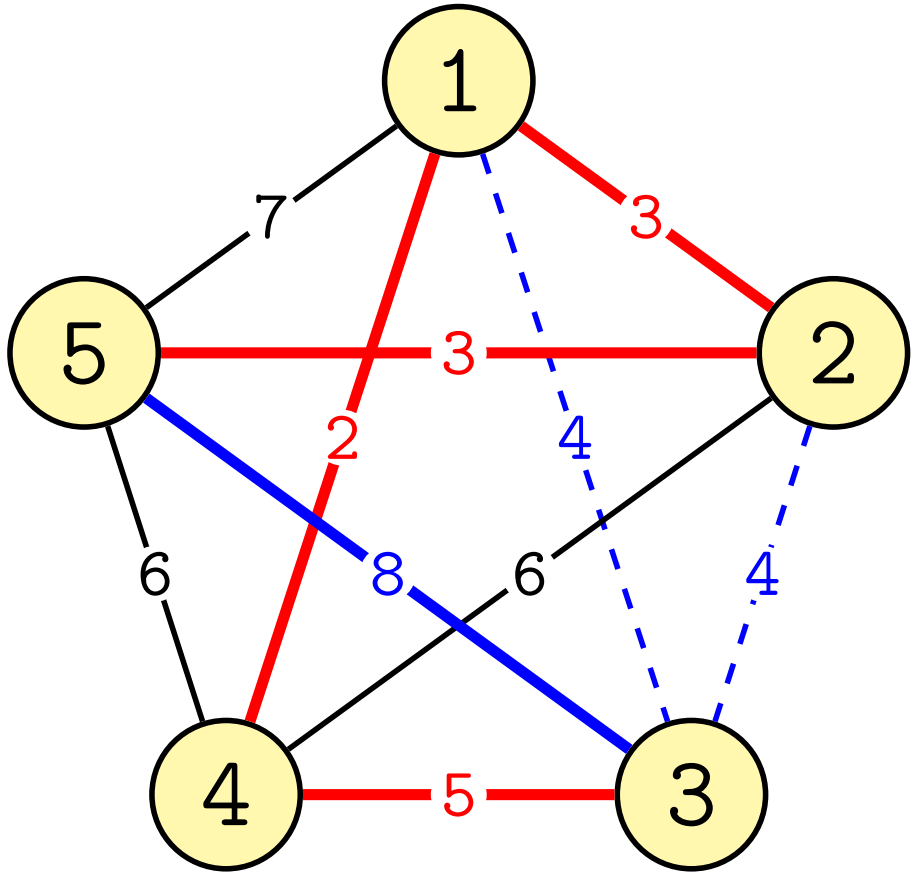
Esempio

	1	2	3	4	5
1		3	4	2	7
2	3		4	6	3
3	4	4		5	8
4	2	6	5		6
5	7	3	8	6	



Esempio

	1	2	3	4	5
1		3	4	2	7
2	3		4	6	3
3	4	4		5	8
4	2	6	5		6
5	7	3	8	6	



Costo: 21

TSP – Greedy (1)

SET greedyTsp(GRAPH G)

```
SET result = Set()
MFSET M = Mfset(G.n)
int[] edges = new int[1...n] = { 0 }                    % N. archi nella catena
A = {ordina gli archi per peso non decrescente}
foreach (u, v) ∈ A do
    if edges[u] < 2 and edges[v] < 2 and M.find(u) ≠ M.find(v) then
        result.insert( (u, v) )
        edges[u] = edges[u] + 1
        edges[v] = edges[v] + 1
        M.merge(u, v)
int u = 1; while edges[u] ≠ 1 do u = u + 1
int v = u + 1; while edges[v] ≠ 1 do v = v + 1
result.insert( (u, v) )
return result
```

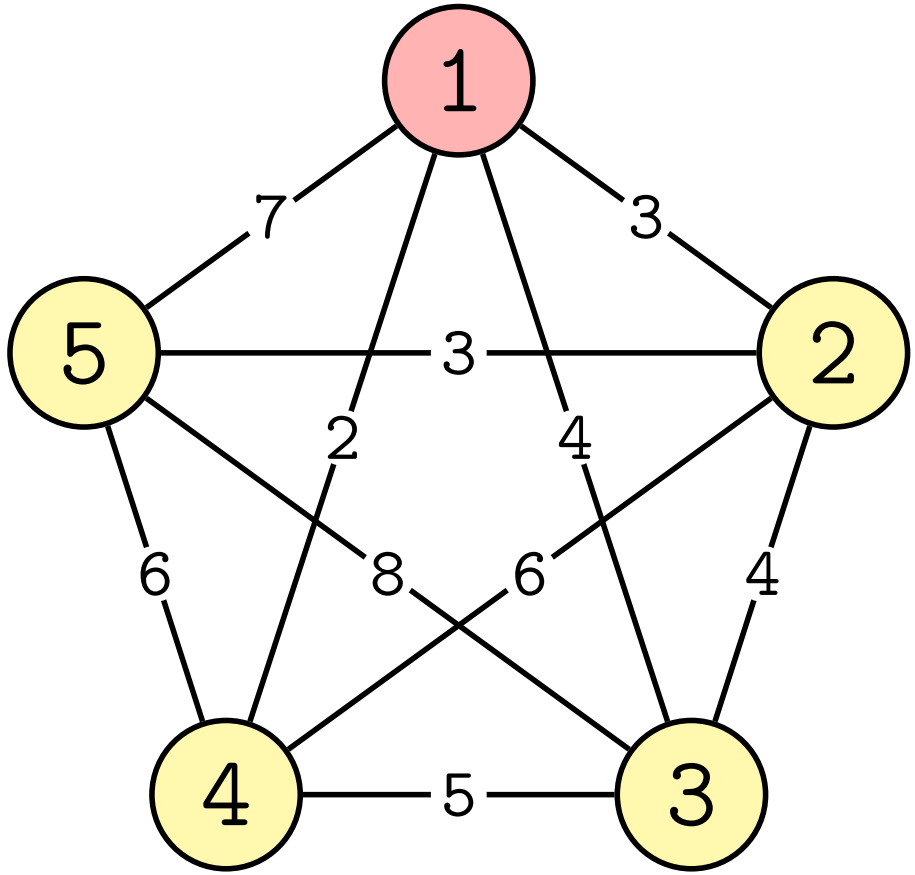
TSP – Greedy (2)

Nearest neighbor

- Si parte da una città
- Si seleziona come prossima città quella più vicina
- Si va avanti così, evitando città già visitate
- Quando si sono visitate tutte le città, si torna alla città di partenza
- Si può lavorare direttamente sulla matrice

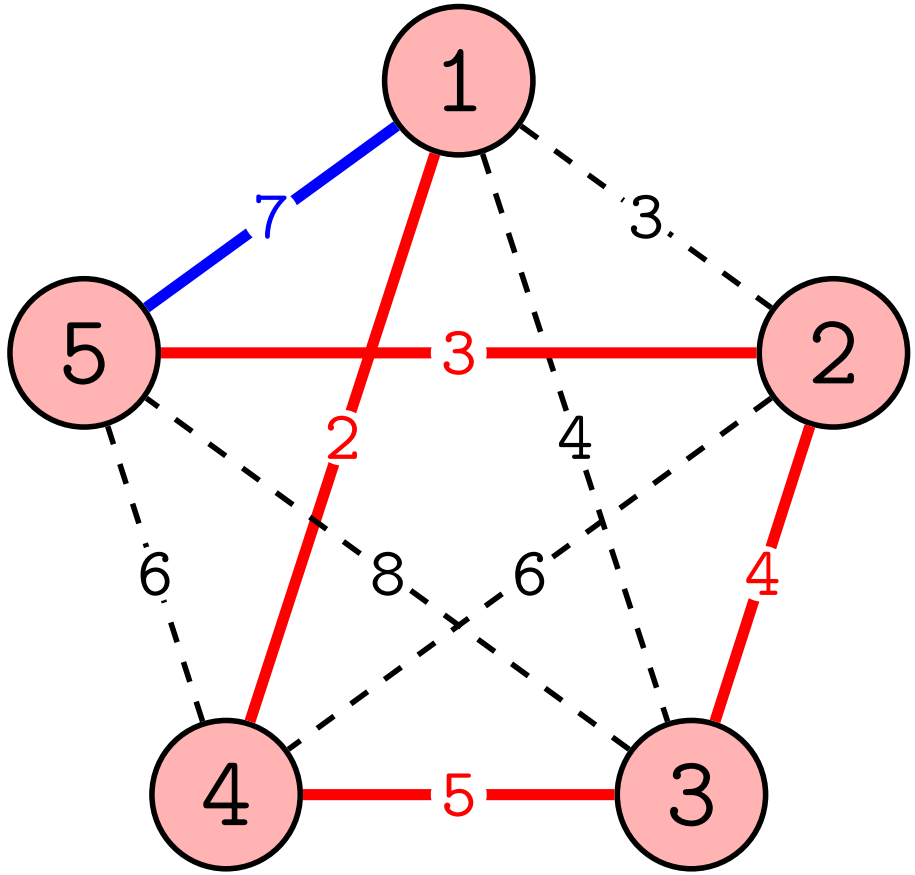
TSP – Greedy (2)

	1	2	3	4	5
1		3	4	2	7
2	3		4	6	3
3	4	4		5	8
4	2	6	5		6
5	7	3	8	6	



TSP – Greedy (2)

	1	2	3	4	5
1		3	4	2	7
2	3		4	6	3
3	4	4		5	8
4	2	6	5		6
5	7	3	8	6	



Costo: 21

TSP – Greedy

- Costo computazionale:
  - Greedy 1: $O(n^2 \log n)$ (ordinamento archi)
  - Greedy 2: $O(n^2)$
- La soluzione così ottenuta si può utilizzare come:
  - base di partenza per un algoritmo branch-&-bound
  - può essere migliorata ancora tramite ricerca locale

TSP – Approccio ricerca locale

Ricerca locale

Sia π un circuito Hamiltoniano del grafo completo derivante dal problema TSP. Si consideri il seguente intorno:

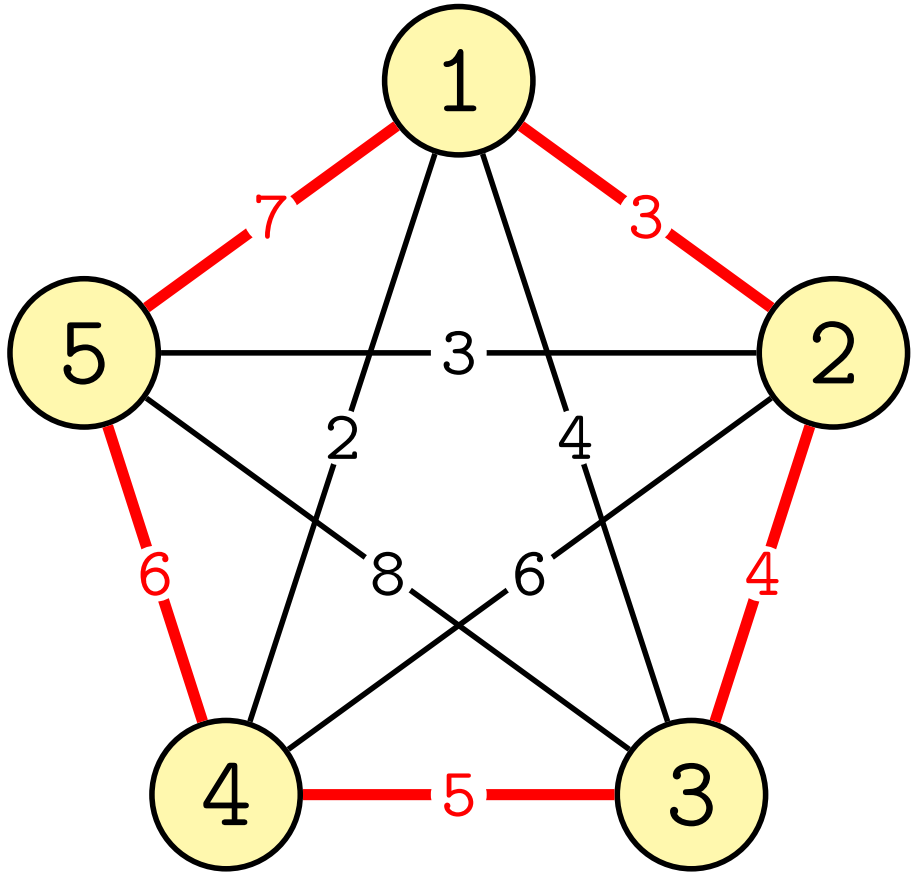
$I_2(\pi) = \{\pi'$: π' è ottenuto da π cancellando due archi non consecutivi del circuito e sostituendoli con due archi non compresi nel circuito$\}$

Note

- $|I_2(\pi)| = n(n-1)/2 - n$
  - Ci sono $n(n-1)/2$ coppie di archi del circuito
  - n di esse sono consecutive
  - Una volta spezzato un circuito, esiste un solo modo per riconnetterlo
- Costo per esaminare $I_2(\pi)$: $O(n^2)$

Esempio

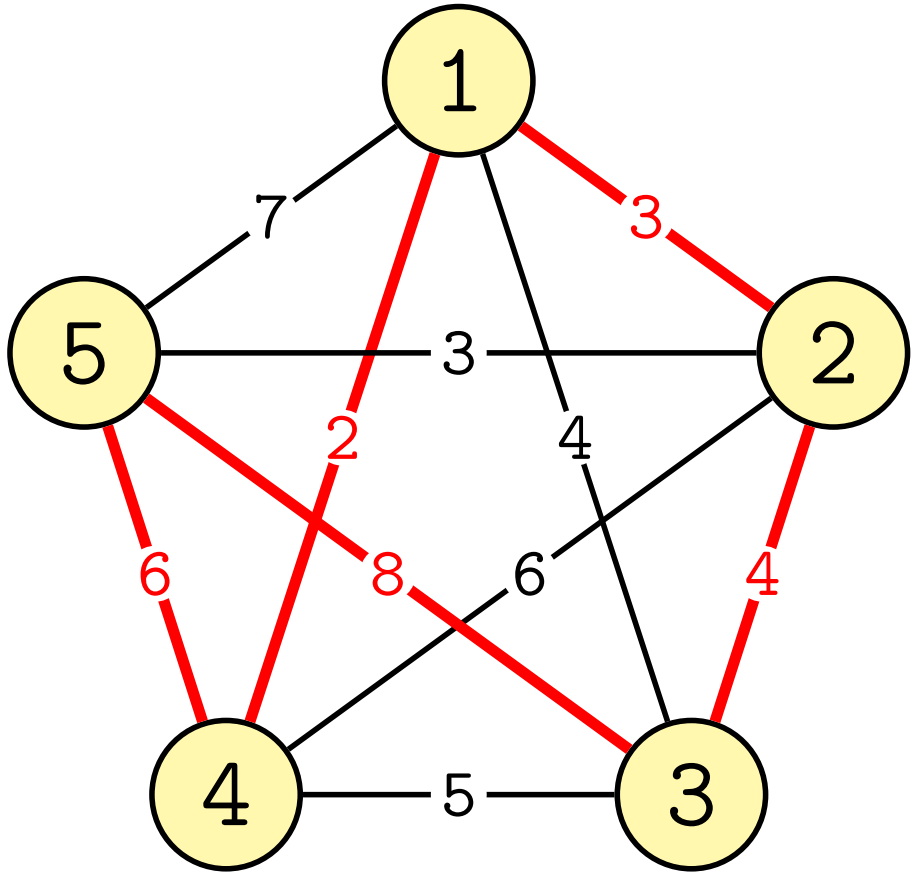
	1	2	3	4	5
1		3	4	2	7
2	3		4	6	3
3	4	4		5	8
4	2	6	5		6
5	7	3	8	6	



Costo: 25

Esempio

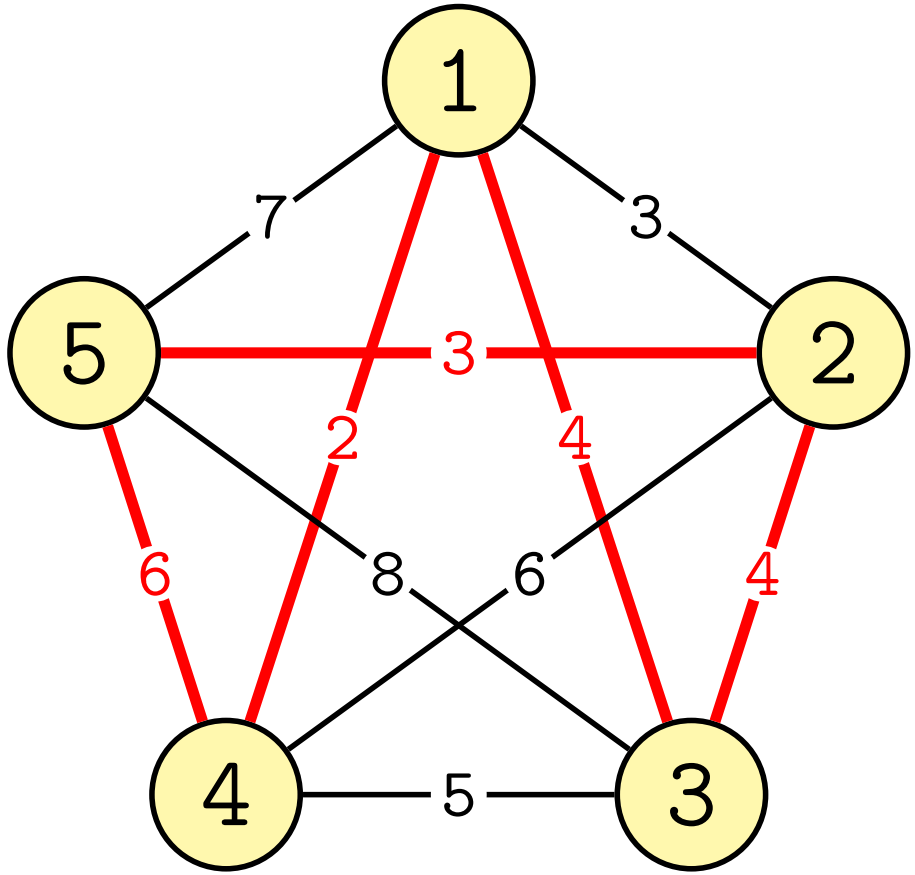
	1	2	3	4	5
1		3	4	2	7
2	3		4	6	3
3	4	4		5	8
4	2	6	5		6
5	7	3	8	6	



Costo: 23

Esempio

	1	2	3	4	5
1		3	4	2	7
2	3		4	6	3
3	4	4		5	8
4	2	6	5		6
5	7	3	8	6	



Costo: 19

Algoritmi euristici

A heuristic is an algorithm that doesn't work.
(Except in practice. Sometimes. Maybe)

Jeff Erickson

Branch-&-bound

Branch-&-bound

Per risolvere un problema di ottimizzazione NP-arduo, si può modificare la procedura enumeration(), vista nella sezione su Backtrack, in modo da "potare" certe sequenze di scelte che si rivelino incapaci di generare la soluzione ottima

Assunzioni – senza perdere (troppa) generalità

- Problema di minimizzazione
- Ogni sequenza di scelte abbia costo non negativo
- Ogni scelta, aggiunta alle scelte già effettuate, non faccia diminuire il costo della soluzione parziale così costruita

Backtrack: ripasso

```
enumeration(⟨dati problema⟩, ITEM[] S, int i, ⟨dati parziali⟩)
if isAdmissible(⟨dati problema⟩, S, i, ⟨dati parziali⟩) then
    processSolution(⟨dati problema⟩, S, i, ⟨dati parziali⟩)
    return true                    % Trovata soluzione, restituisco true
else if reject(⟨dati problema⟩, S, i, ⟨dati parziali⟩) then
    return false  % Impossibile trovare soluzioni, restituisco false
else
    SET C = choices(⟨dati problema⟩, S, i, ⟨dati parziali⟩)
    foreach c ∈ C do
        S[i] = c
        if enumeration(⟨dati problema⟩, S, i + 1, ⟨dati parziali⟩) then
            return true            % Trovata soluzione, restituisco true
    return false                   % Nessuna soluzione, restituisco false
```

Branch-&-bound

Upper bound

- Durante l'enumerazione, si mantengono informazioni
  - sulla miglior soluzione ammissibile *minSol*
  - il suo costo *minCost*
- *minCost* costituisce un limite superiore (upper bound) per il costo della soluzione minima

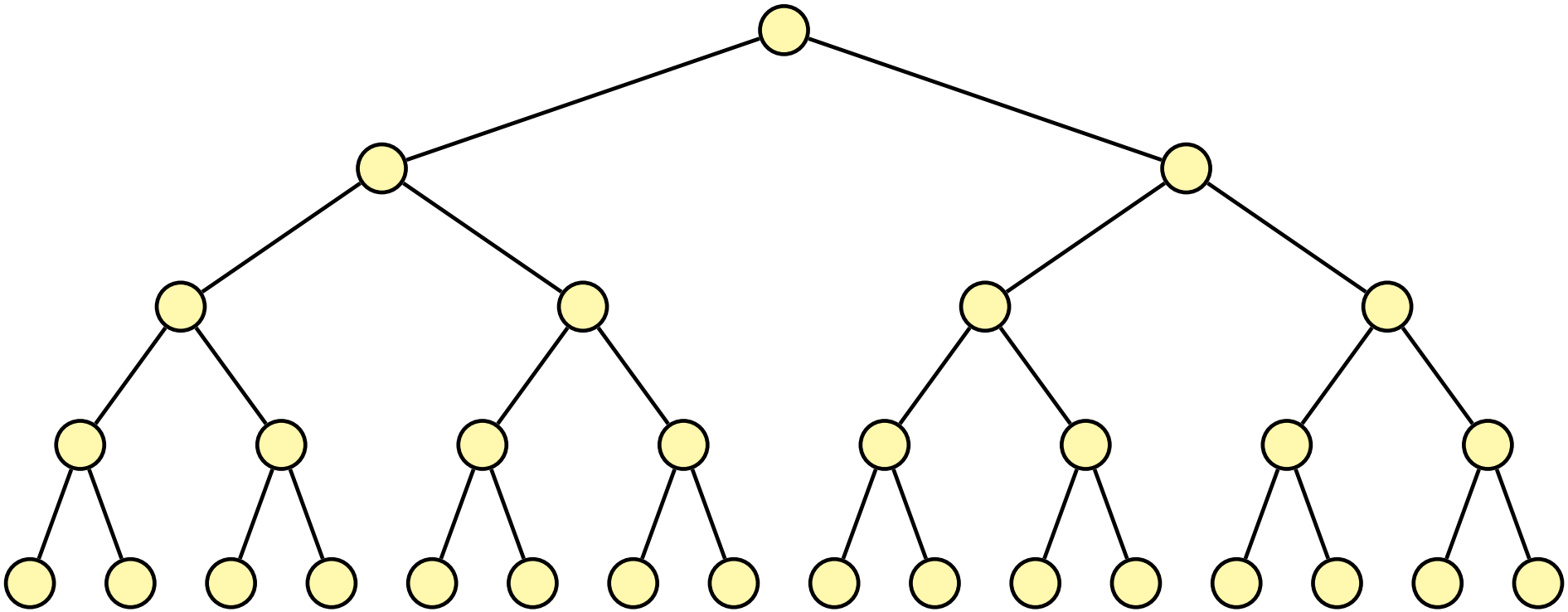
Lower bound

- Si supponga di avere disposizione una opportuna funzione lower bound $\mathsf{lb}(\langle \textit{dati problema} \rangle, S, i, \langle \textit{dati parziali} \rangle)$, che:
  - dipenda dalla sequenza di scelte fatte $S[1 \ldots i]$
  - garantisca che tutte le soluzioni ammissibili generabili facendo nuove scelte abbiano costo $\geq \mathsf{lb}()$

Branch-&-bound

Potatura

Se lb() è maggiore o uguale a *minCost*, allora si può evitare di generare ed esplorare il sottoalbero delle scelte radicato in tal nodo



Branch-&-bound

Note

- Questo metodo non migliora la complessità (superpolinomiale) della procedura enumeration()
- Ne abbassa drasticamente il tempo di esecuzione in pratica
- Tutto dipende dalla funzione lb, che deve approssimare il più possibile il costo della soluzione effettiva

Schema generale

branch&bound($\langle$*dati problema*$\rangle$, ITEM[ ] S, **int** i, $\langle$*dati parziali*$\rangle$)

```
SET C = choices(⟨dati problema⟩, S, i, ⟨dati parziali⟩)
foreach c ∈ C do
    S[i] = c
    int lb = lb(⟨dati problema⟩, S, i, ⟨dati parziali⟩)
    if lb < minCost then
        if i < n then
            branch&bound(⟨dati problema⟩, S, i + 1, ⟨dati parziali⟩)
        else
            if cost(S, i) < minCost then
                minSol = S                    % Variabile globale
                minCost = cost(S, i)          % Variabile globale
```

Commesso viaggiatore – Branch-&-bound

Situazione al passo i-esimo

- Sia n il numero di città
- $d[h][k]$ la distanza intera positiva fra le città h e k
- Al passo i-esimo sono state fatte le scelte $S[1 \ldots i]$ prese dall'insieme $\{1, \ldots, n\}$

Lower bound

Riuscite a calcolare un lower bound a partire da questi dati?

Lower bound – Versione 1

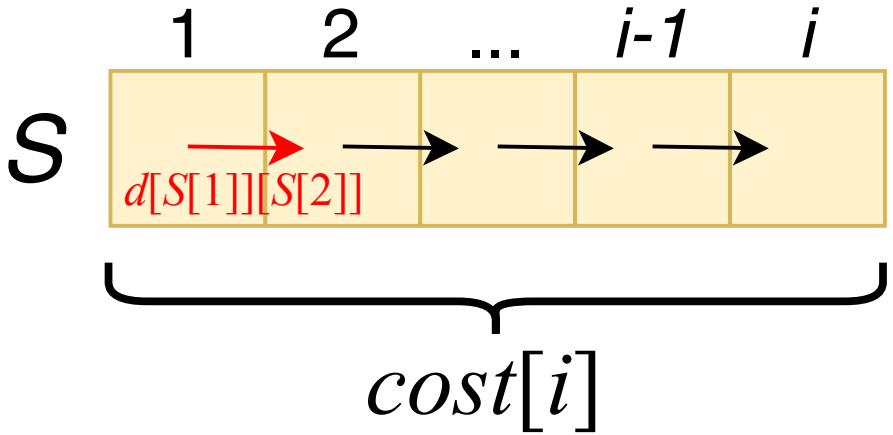
Costo effettivo della soluzione trovata finora

La somma totale degli archi percorsi nel cammino percorso finora.

$cost[i] = \sum_{h=2}^{i} d[S[h-1]][S[h]]$

Lower bound

$\mathsf{lb}(d, S, i) = cost[i]$



Lower bound – Versione 2

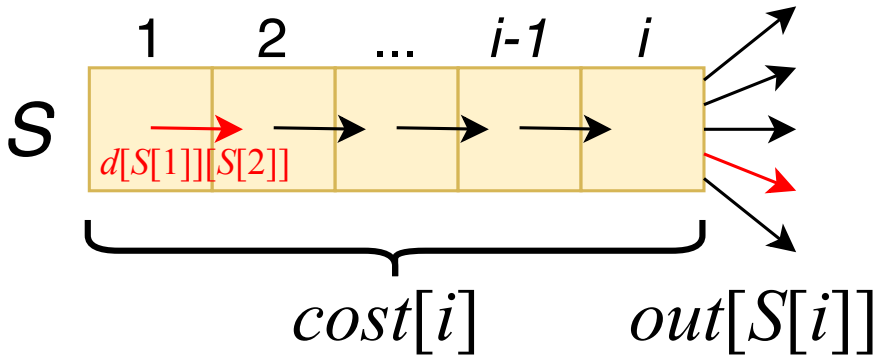
Lower bound per "uscire" dall'ultimo nodo

Il valore minimo fra tutti gli archi che escono da $S[i]$ e vanno in uno dei nodi non ancora scelti.

$out[S[i]] = \min_{k \notin S[1 \ldots i]} d[S[i]][k]$

Lower bound

$\mathsf{lb}(d, S, i) = cost[i] + out[S[i]]$



Lower bound – Versione 3

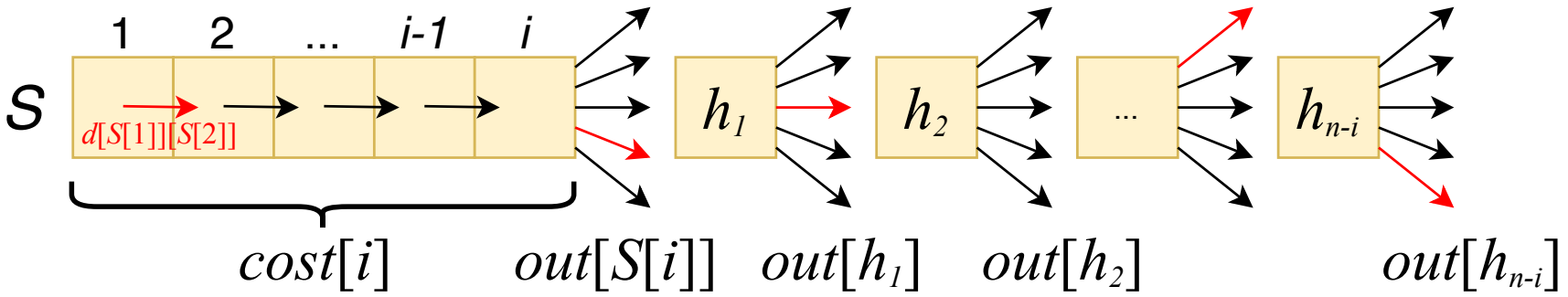
Lower bound per "uscire" dai nodi non ancora scelti

Per ogni nodo h non scelto, il valore minimo fra gli archi che escono da esso e vanno in un nodo non ancora scelto oppure in $S[1]$ (chiusura del circuito)

$\forall h \notin S[1 \dots h] : out[h] = \min_{k \notin S[2 \dots i]} d[h][k]$

Lower bound

$\mathsf{lb}(d, S, i) = cost[i] + out[S[i]] + \sum_{h \notin S[1 \dots i]} out[h]$

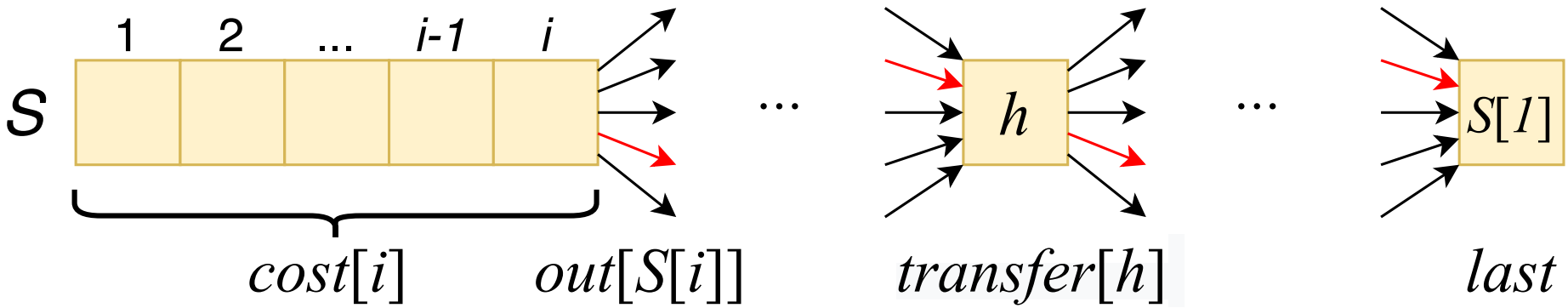


Lower bound – Versione 4

Lower bound per "attraversare" i nodi non ancora scelti

Per ogni nodo h non scelto, il costo minimo dato dalla somma di due archi (p, h) e (h, q) distinti che entrano e escono da h, proveniendo da $S[i]$ o da un nodo non ancora scelto; andando in un nodo non ancora scelto oppure in $S[1]$

$$transfer[h] = \min_{p \notin S[1,\ldots,i-1], q \notin S[2\ldots i], p,q,h \text{ distinti}} \{d[p][h] + d[h][q]\}$$

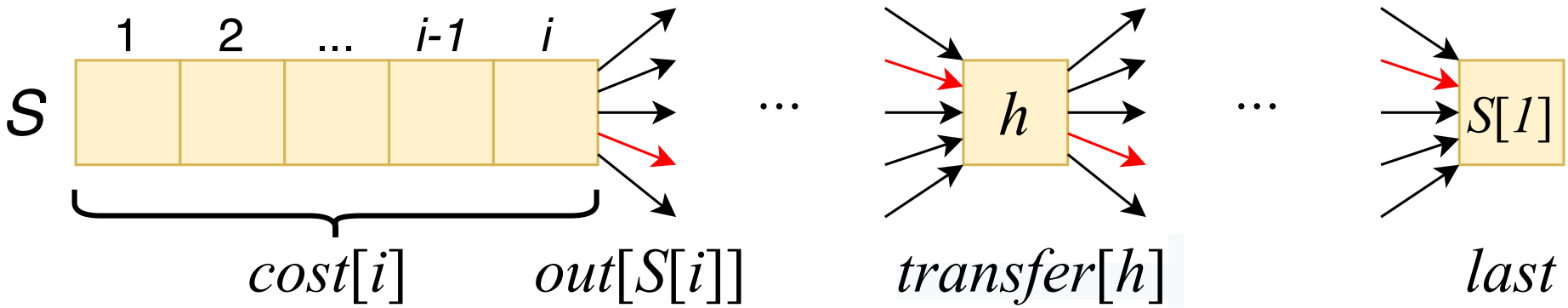


Lower bound – Versione 4

Lower bound per tornare nel primo nodo

Il valore minimo fra tutti gli archi che vanno da uno dei nodi non ancora scelti a $S[1]$

$last = \min_{h \notin S[1 \ldots i]} d[h][S[1]]$

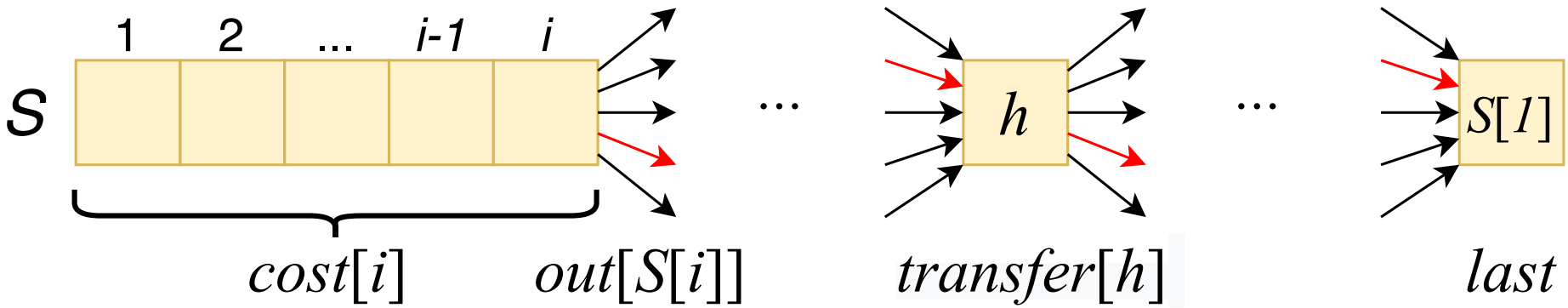


Lower bound – Versione 4

Lower bound

Si divide per un fattore 2 perché tutti gli archi vengono contati due volte, in uscita per un nodo e in entrata per un altro

$$\mathsf{lb}(d, S, i) = cost[i] + \left\lceil \frac{out + \sum_{h \notin S} transfer[h] + last}{2} \right\rceil$$



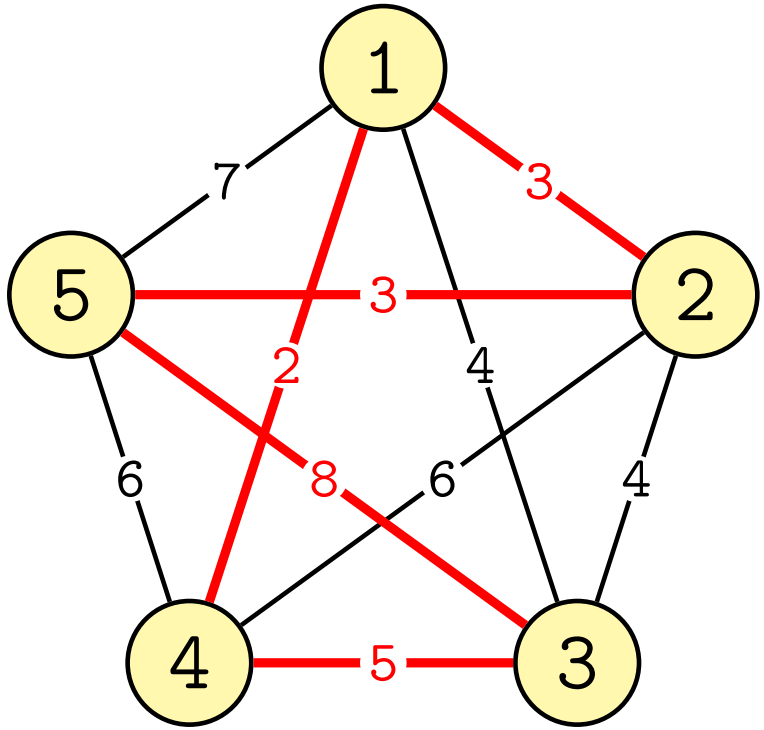
Commesso viaggiatore – Branch-&-bound

bbTsp(ITEM[] S, **int** $cost$, SET R, **int** n, **int** i)

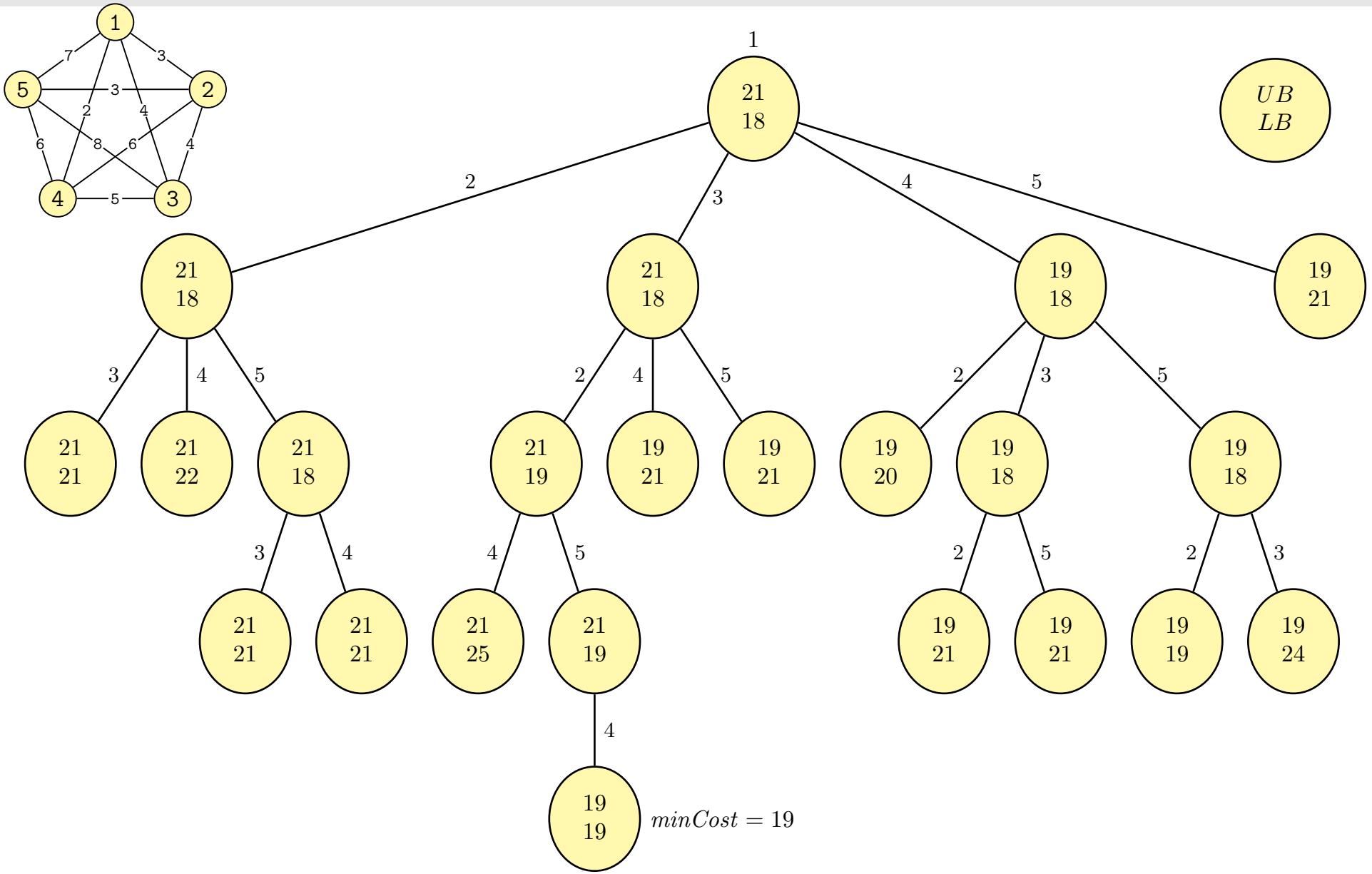
SET $choices$ = copy(R)
foreach $c \in choices$ **do**
    $S[i] = c$
    R.remove(c)
    if $i < n$ **then**
        {calcola out, $last$, e $transfer[h]$ per ogni $h \in R$}
        int $lb = cost[i] + \lceil (out + \sum_{h \notin S} transfer[h] + last)\ /2 \rceil$
        if $lb < minCost$ **then**
            bbTsp($S, cost + d[S[i-1]][S[i]], R, n, i+1$)
    else
        $cost = cost + d[S[i]][S[1]]$
        if $cost < minCost$ **then**
            $minSol = S$ % Variabile globale
            $minCost = costo$ % Variabile globale
    R.insert(c)

Dettagli

- *minCost* è una variabile globale
- Invece di inizializzarla a $+\infty$, possiamo scegliere una permutazione a caso
- Ad esempio, la permutazione 1-2-5-3-4 ha un costo pari a 21
- Per evitare che lo stesso circuito sia generato più volte, si parte da un nodo fissato (es. 1)



Esempio


1
7
3
5
3
2
2
4
6
8
6
4
4
5
3
1
21
18
UB
LB
2
3
4
5
21
18
21
18
19
18
19
21
3
4
5
2
4
5
2
3
5
21
21
21
22
21
18
21
19
19
21
19
21
19
20
19
18
19
18
3
4
4
5
2
5
2
3
21
21
21
21
21
25
21
19
19
21
19
21
19
19
19
24
4
19
19
minCost = 19

Esempio

In questo semplice esempio, è stato possibile "potare" 42 su 65 nodi

Possibili miglioramenti

- È possibile variare l'ordine di visita dell'albero delle scelte
  - DFS vs Best-first
- È possibile variare il meccanismo di branching
  - Sui nodi, sugli archi, etc.
- È possibile cercare dei lower bound più stretti
  - Held, M., and Karp, R. M. (1971), "The Traveling Salesman Problem and Minimum Spanning Trees: part II", Mathematical Programming 1:6-25

Spunti di lettura

Bibliografia

- Jeff Erickson. Approximation Algorithms.
  http://jeffe.cs.illinois.edu/teaching/algorithms/notes/J-approx.pdf
  (Per approfondire)
- David Williamson, David Shmoys (2010). The Design of Approximation Algorithms. Cambridge University Press.
  http://www.designofapproxalgs.com/book.pdf
  (500 pagine)
- David L. Applegate, Robert E. Bixby, Vašek Chvátal, and William J. Cook. The Traveling Salesman Problem: A Computational Study. Princeton University Press, 2007.
  (600 pagine *solo* su TSP)