Algoritmi e Strutture Dati

Problemi intrattabili
Teoria dell'NP-completezza

Alberto Montresor

Università di Trento

2024/05/01

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License.

Sommario

1. Introduzione
2. Riduzioni
3. Classi $\mathbb{P}$, $\mathbb{PSPACE}$
4. Classe $\mathbb{NP}$
5. Problemi $\mathbb{NP}$-Completi

Introduzione

Con l'eccezione della sezione su backtrack, finora abbiamo considerato solo problemi con soluzioni in tempo polinomoniale

- Il tempo di esecuzione è $O(n^k)$ per qualche k

Sono gli unici problemi interessanti?

- Esistono problemi che per essere risolti hanno bisogno di un tempo almeno esponenziale ($\mathbb{EXPTIME}$)
  - Valutare una posizione di scacchi, dama, go;
  - Risolvere il problema delle Torri di Hanoi
- Esistono problemi per i quali non esiste alcuna soluzione
  - Halting problem

Introduzione

Obiettivo della lezione

- Discuteremo di una classe di problemi per cui non è chiaro se esiste un algoritmo polinomiale oppure no
- Questi problemi sono tutti sulla stessa barca: possono essere tutti risolti in tempo polinomiale, oppure nessuno
- Questa classe contiene tantissimi problemi interessanti!

Millenium Prize Problems, Clay Institute

- Premio istituito nel 2000
- Sette problemi matematici aperti
- 1M€ per chi li risolve
- Ad oggi, un solo problema risolto (Congettura di Poincarè)

Alcune definizioni

Problema astratto

Una problema astratto è una relazione binaria $R \subseteq I \times S$ tra un insieme I di istanze del problema e un insieme S di soluzioni

Esempio – SHORTEST-PATH

- Un'istanza è una quadrupla (V, E, u, v)
- Una soluzione è una sequenza ordinata di vertici $u = v_1 \dots v_k = v$
- Nota: possono esistere più soluzioni associate alla stessa istanza

Tipologia di problemi

Problemi di ottimizzazione

- Data un'istanza, trovare la "migliore" soluzione secondo criteri specifici
- SHORTEST-PATH (Opt.): Dati un grafo G e due nodi u, v, trovare il cammino più breve fra essi

Problemi di ricerca

- Data un'istanza, trovare una possibile soluzione fra quelle esistenti
- PATH: Dati un grafo G e due nodi u, v, trovare un cammino fra essi

Problemi di decisione

- Data un'istanza, verificare se soddisfa o meno una data proprietà
  La relazione R è una funzione $R : I \to \{0, 1\}$
- SHORTEST-PATH (Dec.): Dati un grafo G, due nodi u, v e un valore k, esiste un cammino tra u e v di lunghezza minore o uguale a k?

Equivalenza problemi di ottimizzazione / decisione

Ragioneremo in termini di problemi di decisione

- La versione decisionale è più semplice da trattare matematicamente
- Se posso risolvere efficientemente la versione di ottimizzazione $\Rightarrow$ posso risolvere efficientemente la versione di decisione
- Se *non* posso risolvere efficientemente la versione di decisione $\Rightarrow$ *non* posso risolvere efficientemente la versione di ottimizzazione

Esempio – Shortest path

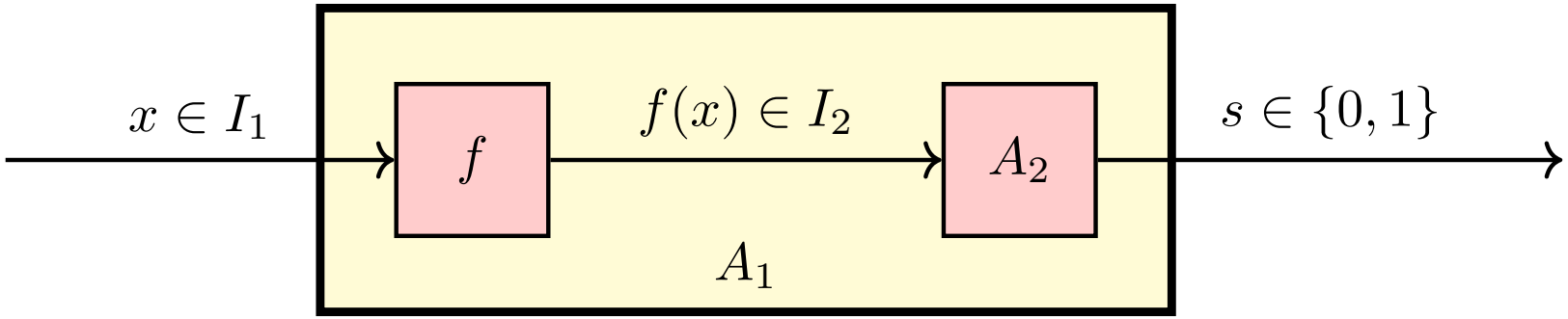
- Se conosco il cammino più breve, posso rispondere alla domanda decisionale per qualunque valore di k

Riduzione polinomiale

Riduzione polinomiale

Dati due problemi decisionali $R_1 \subseteq I_1 \times \{0,1\}$ e $R_2 \subseteq I_2 \times \{0,1\}$, R_1 è riducibile polinomialmente a R_2 ($R_1 \leq_p R_2$) se esiste una funzione $f : I_1 \to I_2$ con le seguenti proprietà:

- f è calcolabile in tempo polinomiale;
- per ogni istanza x del problema R_1 e ogni soluzione $s \in \{0,1\}$, $(x,s) \in R_1 \Leftrightarrow (f(x),s) \in R_2$.

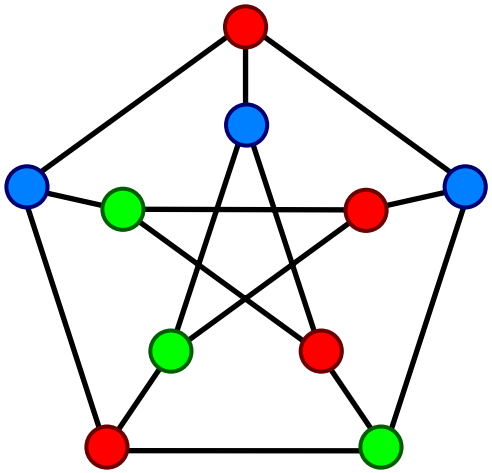


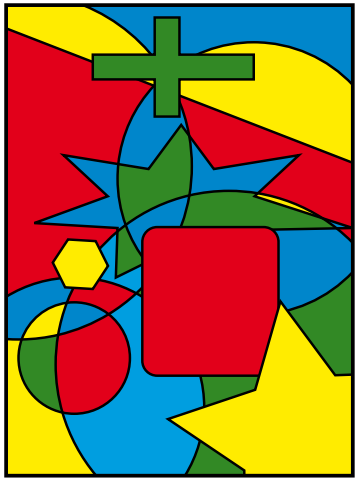
Colorazione di grafi

Colorazione di grafi (GRAPH-COLORING)

Dati un grafo non orientato $G = (V, E)$ e un insieme di colori C, una colorazione dei vertici è un assegnamento $f : V \to C$

- che "colora" ogni nodo con uno dei valori in C,
- tale per cui nessuna coppia di nodi adiacenti ha lo stesso colore.





https://it.wikipedia.org/wiki/Colorazione_dei_grafi#/media/File:Petersen_graph_3-coloring.svg
https://en.wikipedia.org/wiki/Four_color_theorem#/media/File:Four_Colour_Map_Example.svg

Colorazione di grafi

Colorazione, ottimizzazione

Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, restituire la colorazione che richiede il minimo numero di colori

Colorazione, decisionale

Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$ e un valore k, determinare se esiste una colorazione di G con k colori

Sudoku

SUDOKU

Il problema generale del Sudoku richiede di inserire dei numeri fra 1 e n^2 in una matrice di $n^2 \times n^2$ elementi suddivisa in $n \times n$ sottomatrici di dimensione $n \times n$, in modo tale che nessun numero compaia più di una volta in ogni riga, colonna e sottomatrice

SUDOKU, decisionale

Data una matrice $n^2 \times n^2$ elementi, determinare se esiste un modo per assegnare i numeri in modo da rispettare le regole del Sudoku

SUDOKU-PRECOLORED, decisionale

Data una matrice $n^2 \times n^2$ elementi con alcuni numeri già presenti nella matrice, determinare se esiste un modo per assegnare i numeri in modo da rispettare le regole del Sudoku

Riduzione da problema particolare a problema generale

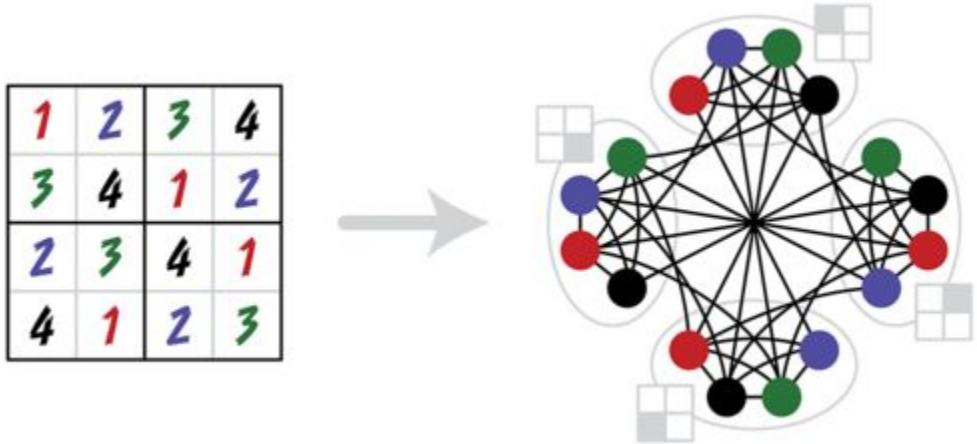
Riduzione in tempo polinomiale

$V = \{(x, y) : 1 \leq x \leq n^2, 1 \leq y \leq n^2\}$

$[(x, y), (x', y')] \in E \Leftrightarrow$

- $x = x'$; oppure,
- $y = y'$; oppure,
- $(\lceil x/n \rceil = \lceil x'/n \rceil) \wedge (\lceil y/n \rceil = \lceil y'/n \rceil)$

$C = \{1, \ldots, n\}$.



Riduzione

SUDOKU $\leq_p$ GRAPH-COLORING

Se abbiamo una soluzione per la colorazione, allora abbiamo una soluzione algoritmica per il Sudoku

Applicazioni

Assegnamento radio frequenze in un insieme di torri cellulari

Allocazione degli esami universitari

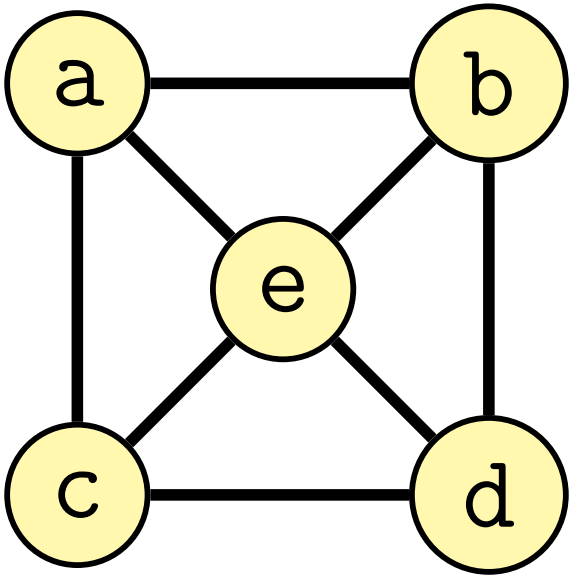
Sudoku

Insieme indipendente

Insieme Indipendente (INDEPENDENT-SET)

Sia dato un grafo non orientato $G = (V, E)$; un insieme $S \subseteq V$ è un insieme indipendente $\Leftrightarrow$ nessun arco unisce due nodi in S

$$\forall (x, y) \in E : x \notin S \vee y \notin S$$

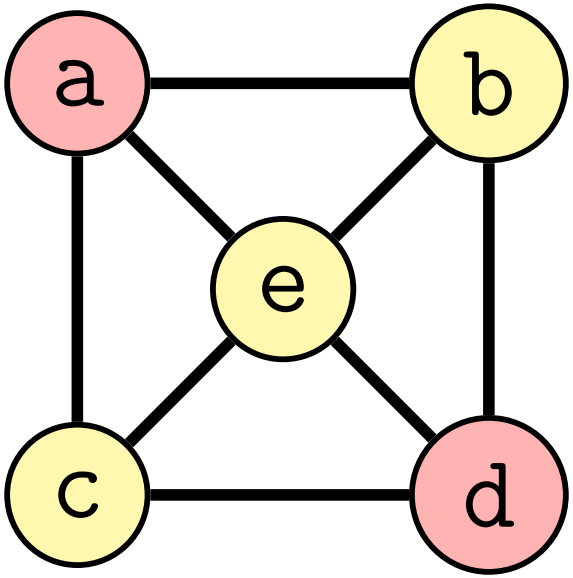


Insieme indipendente

Insieme Indipendente (INDEPENDENT-SET)

Sia dato un grafo non orientato $G = (V, E)$; un insieme $S \subseteq V$ è un insieme indipendente $\Leftrightarrow$ nessun arco unisce due nodi in S

$$\forall (x, y) \in E : x \notin S \vee y \notin S$$



Insieme indipendente

INDEPENDENT-SET, ottimizzazione

Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, restituire il più grande insieme indipendente presente nel grafo

INDEPENDENT-SET, decisionale

Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$ e un valore k, determinare se esiste un insieme indipendente di dimensione almeno k

Packing problem

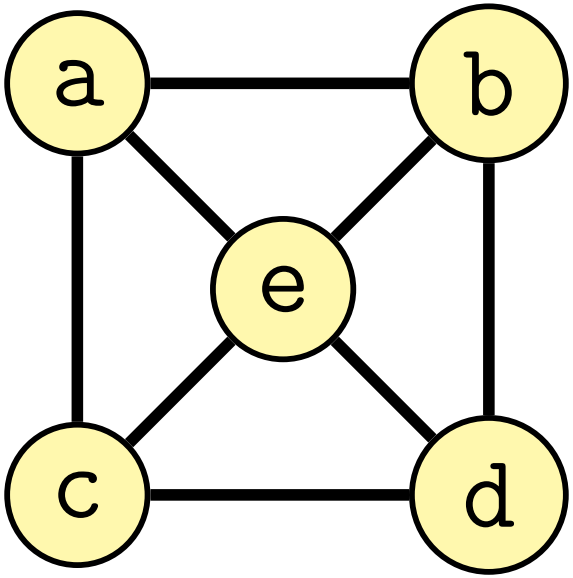
Questo è un esempio di packing problem, un problema in cui si cerca di selezionare il maggior numero di oggetti, la cui scelta è però soggetta a vincoli di esclusione

Copertura di vertici

Copertura di vertici (VERTEX-COVER)

Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, un insieme $S \subseteq V$ è una copertura di vertici $\Leftrightarrow$ ogni arco ha almeno un estremo in S

$$\forall (x, y) \in E : x \in S \vee y \in S$$

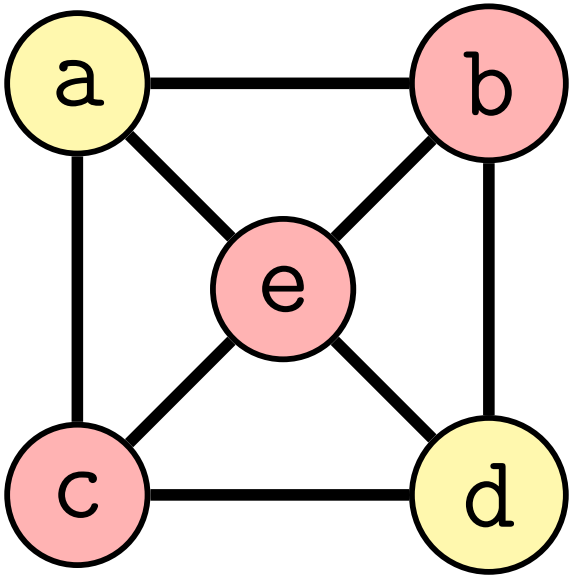


Copertura di vertici

Copertura di vertici (VERTEX-COVER)

Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, un insieme $S \subseteq V$ è una copertura di vertici $\Leftrightarrow$ ogni arco ha almeno un estremo in S

$$\forall (x, y) \in E : x \in S \vee y \in S$$



Copertura di vertici

VERTEX-COVER, ottimizzazione

Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, restituire la copertura dei vertici di dimensione minima.

VERTEX-COVER, decisionale

Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$ e un valore k, determinare se esiste una copertura di vertici di dimensione al massimo k

Covering problem

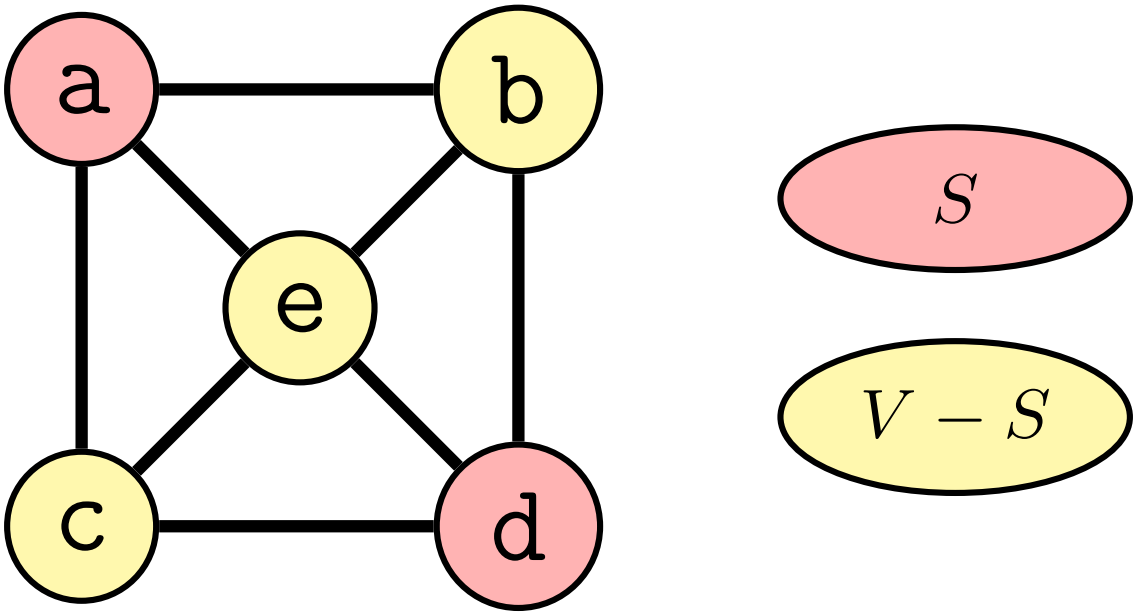
Questo è un esempio di covering problem, un problema in cui si cerca di ottenere il più piccolo insieme in grado di coprire un insieme arbitrario di oggetti con il più piccolo sottoinsieme di questi oggetti.

Riduzione per problemi duali

$S \subseteq V$ è un independent set $\Rightarrow V - S$ è un vertex cover

Se S è un insieme indipendente:

- ogni arco (x, y) non può avere entrambi gli estremi in S;
- quindi almeno uno dei due deve essere in $V - S$, CVD

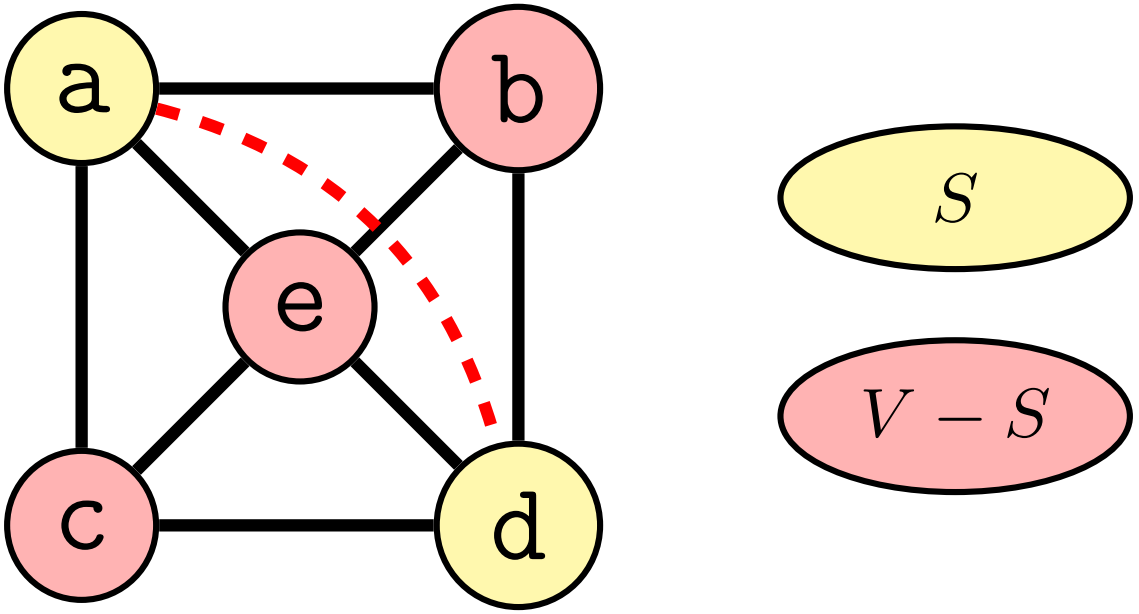


Riduzione per problemi duali

$V - S$ è un vertex cover $\Rightarrow S \subseteq V$ è un independent set

Supponiamo per assurdo che S non sia un independent set:

- allora esiste un arco (x, y) che unisce due nodi in S
- nessuno dei due estremi sta in $V - S$
- questo implica che $V - S$ non è un vertex cover, assurdo



Riduzione per problemi duali

VERTEX-COVER $\leq_p$ INDEPENDENT-SET
INDEPENDENT-SET $\leq_p$ VERTEX-COVER

Abbiamo quindi dimostrato che i due problemi sono equivalenti.

SAT

Formule booleane in forma normale congiuntiva

Dato un insieme V contenente n variabili

- un letterale è una variabile v oppure la sua negazione $\overline{v}$
- una clausola è una disgiunzione di letterali (letterali separati da **or**)
- una formula in forma normale congiuntiva è una congiunzione di clausole (clausole separate da **and**)

Esempio

$$(x \vee \overline{y} \vee z) \wedge (\overline{x} \vee w) \wedge y$$

SAT

Soddisfacibilità di formule booleane (SATisfiability)

Data un'espressione in forma normale congiuntiva, il problema della soddisfacibilità consiste nel decidere se esiste una assegnazione di valori di verità alle variabili che rende l'espressione vera.

Esempio

$$(x \vee \overline{y} \vee z) \wedge (\overline{x} \vee w) \wedge y$$

$$x = \textbf{true}, y = \textbf{true}, w = \textbf{true}, z = \textbf{true}\}$$

$$(\textbf{true} \vee \textbf{false} \vee \textbf{true}) \wedge (\textbf{false} \vee \textbf{true}) \wedge \textbf{true}$$

3-SAT

3-SAT

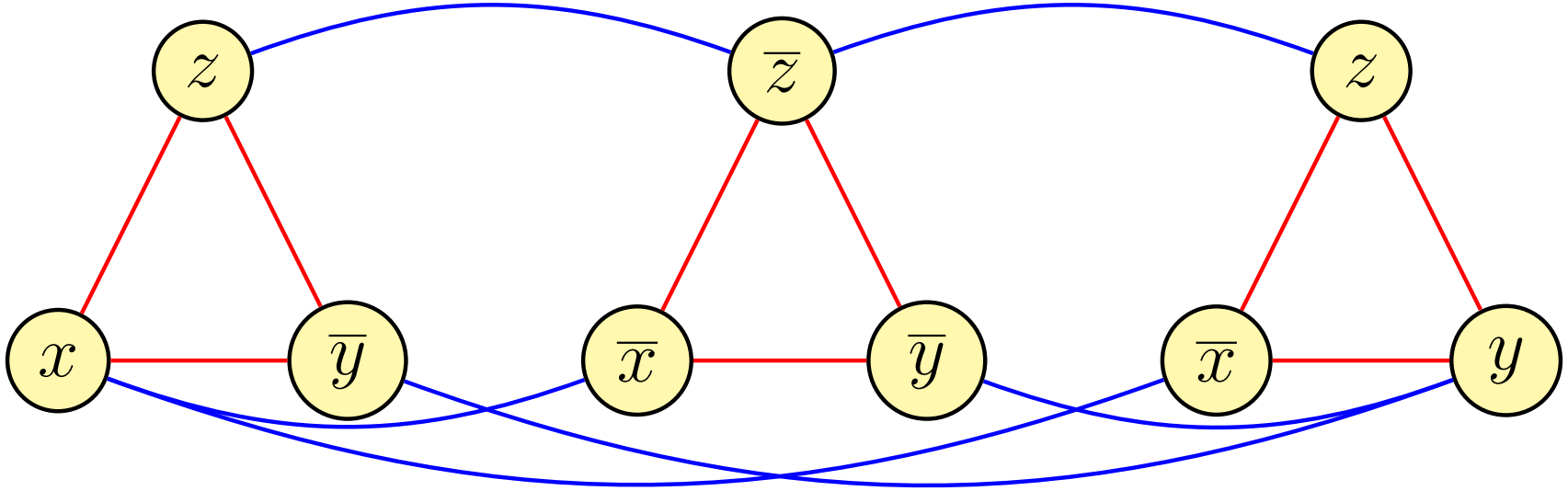
Data una espressione in forma normale congiuntiva in cui le clausole hanno esattamente 3 letterali, il problema della soddisfacibilità consiste nel decidere se esiste una assegnazione di valori di verità alle variabili che rende l'espressione vera.

Vogliamo dimostrare che: 3-SAT $\leq_p$ INDEPENDENT-SET

Riduzione tramite "gadget"

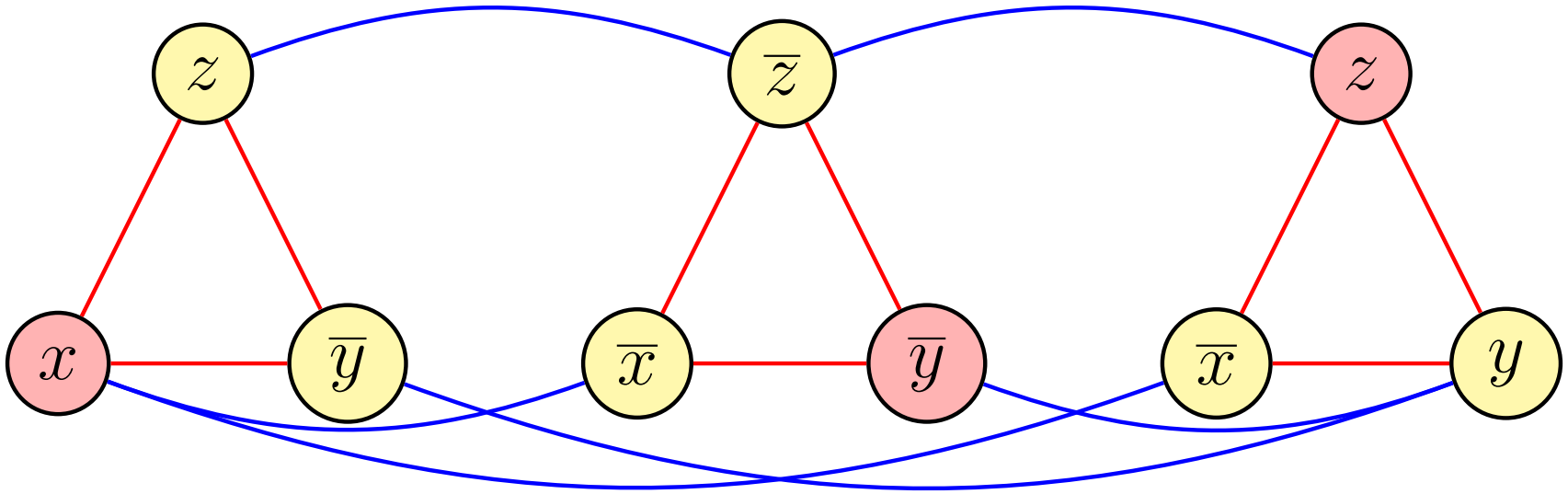
Data una formula 3-SAT, costruiamo un grafo nel modo seguente:

- Per ogni clausola, aggiungiamo un terzetto di nodi, collegati fra di loro da archi
- Per ogni letterale che compare in modo normale e in modo negato, aggiungere un arco fra di essi (arco di conflitto).



Riduzione tramite "gadget"

La formula 3-SAT è soddisfacibile se e solo è possibile trovare un independent set di dimensione esattamente k.



https://en.wikipedia.org/wiki/Gadget_(computer_science)

Riduzione da problema generale a problema particolare

Ovviamente: 3-SAT $\leq_p$ SAT

È possibile dimostrare che SAT $\leq_p$ 3-SAT?

È possibile trasformare una formula SAT in una formula 3-SAT usando due semplici trucchi:

- Se la clausola è più lunga di tre elementi, si introduce una nuova variabile e si divide la clausola in due:

$$(a \vee b \vee c \vee d) \equiv (a \vee b \vee z) \wedge (\overline{z} \vee c \vee d)$$

- Se la clausola è più corta di tre elementi, si fa "padding"

$$(a \vee b) \equiv (a \vee a \vee b)$$

Transitività delle riduzioni

È facile intuire che la nozione di riducibilità polinomiale gode della proprietà transitiva

$$\text{SAT} \leq_p \text{3-SAT} \leq_p \text{INDEPENDENT-SET} \leq_p \text{VERTEX-COVER}$$

Classi $\mathbb{P}$, $\mathbb{PSPACE}$

Algoritmo

Dati un problema di decisione R e un algoritmo A (scritto in un modello di calcolo Turing-equivalente) che lavora in tempo $f_t(n)$ e spazio $f_s(n)$, diciamo che A risolve R se A restituisce s su un'istanza x se e solo se $(x, s) \in R$.

Classi di complessità

Data una qualunque funzione $f(n)$, chiamiamo:

- $\mathbb{TIME}(f(n))$ l'insieme dei problemi decisionali risolvibili da un algoritmo che lavora in tempo $O(f(n))$
- $\mathbb{SPACE}(f(n))$ gli insiemi dei problemi decisionali risolvibili da un algoritmo che lavora in spazio $O(f(n))$.

Classi $\mathbb{P}$, $\mathbb{PSPACE}$

Classe $\mathbb{P}$

La classe $\mathbb{P}$ è la classe dei problemi decisionali risolvibili in tempo polinomiale nella dimensione n dell'istanza di ingresso:

$$\mathbb{P} = \cup_{c=0}^{\infty} \mathbb{TIME}(n^c)$$

Classe $\mathbb{PSPACE}$

La classe $\mathbb{PSPACE}$ è la classe dei problemi decisionali risolvibili in spazio polinomiale nella dimensione n dell'istanza di ingresso:

$$\mathbb{PSPACE} = \cup_{c=0}^{\infty} \mathbb{SPACE}(n^c)$$

Note

$\mathbb{P} \subseteq \mathbb{PSPACE}$

Classe $\mathbb{NP}$

Certificato

Dato un problema decisionale R e un'istanza di input x tale che $(x, \textbf{true}) \in R$, un certificato è un insieme di informazioni che permette di provare che $(x, \textbf{true}) \in R$

Esempi

- SAT: un assegnamento di verità alle variabili della formula
- GRAPH-COLORING: un'associazione nodo-colore $f : V \to \{1, \ldots, k\}$
- INDEPENDENT-SET: un sottoinsieme $S \subseteq V$ di k elementi

Tutti questi "certificati" hanno dimensione polinomiale nella dimensione dell'input.

Classe $\mathbb{NP}$

I certificati suddetti possono essere verificati in tempo polinomiale:

- SAT: si calcola il valore di verità della formula a partire dall'assegnamento di verità delle variabili in tempo $O(n)$
- GRAPH-COLORING: si verifica che nodi adiacenti non abbiano lo stesso colore in tempo $O(m + n)$
- INDEPENDENT-SET: si verifica che nodi in S non abbiano nodi adiacenti in S in tempo $O(m + n)$

Classe $\mathbb{NP}$

L'insieme di tutti i problemi che ammettono un certificato verificabile in tempo polinomiale.

Certificati non polinomiali

Quantified Boolean Formula (QBF)

Il problema QBF è una generalizzazione del problema SAT nel quale ad ogni variabile possono essere applicati quantificatori universali e esistenziali

Esempio

$$\forall x\ \exists y\ \exists z\ ((x \vee z) \wedge y)$$

Esercizio...

Progettate un certificato per QCB che possa essere verificato in tempo polinomiale

Si ritiene che un certificato del genere non esista

Relazioni fra problemi

Lemma

Se $R_1 \leq_p R_2$ e $R_2 \in \mathbb{P}$, allora anche R_1 è contenuto in $\mathbb{P}$.

Dimostrazione

- Sia $T_f(n) = O(n^{k_f})$ il tempo necessario per trasformare un input di R_1 in input di R_2 tramite una funzione f
- Sia $T_2(n) = O(n^{k_2})$ il tempo necessario per risolvere R_2
- Qual è la complessità per risolvere R_1?
- La funzione f può prendere un input di dimensione n e trasformarlo in un input di dimensione $O(n^{k_f})$ per R_2
- Il tempo per risolvere R_1 sarà quindi $T_1(n) = O(n^{k_f k_2})$
- $T_1(n)$ è polinomiale

Definizioni

Problema $\mathbb{NP}$-arduo ($\mathbb{NP}$-hard)

Un problema decisionale R si dice $\mathbb{NP}$-arduo se ogni problema $Q \in \mathbb{NP}$ è riducibile polinomialmente a R ($Q \leq_p R$)

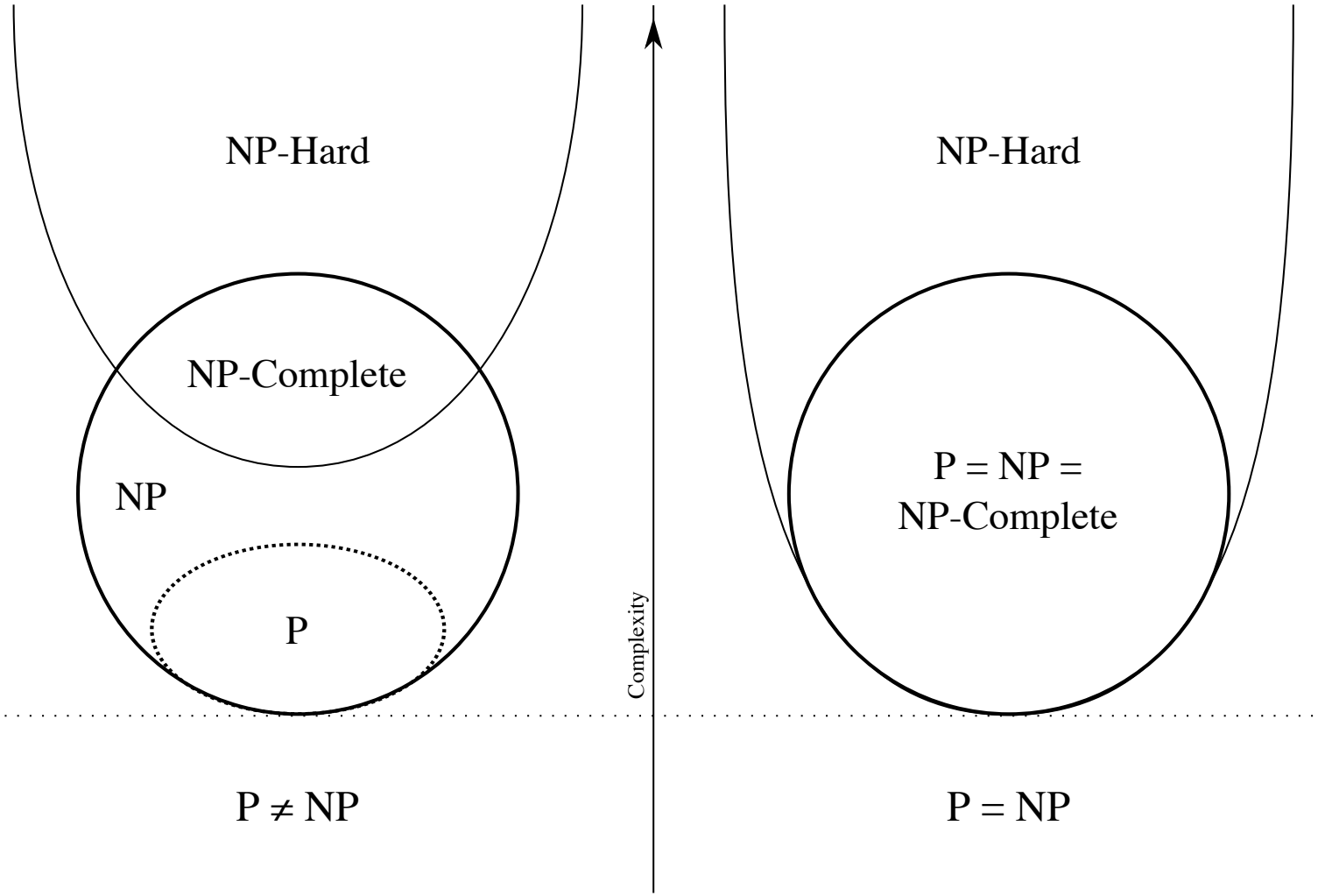
Problema $\mathbb{NP}$-completo ($\mathbb{NP}$-complete)

Un problema decisionale R si dice $\mathbb{NP}$-completo se appartiene alla classe $\mathbb{NP}$ ed è $\mathbb{NP}$-hard.

$\mathbb{P}$=$\mathbb{NP}$?

Se un qualunque problema decisionale $\mathbb{NP}$-completo appartenesse a $\mathbb{P}$, allora risulterebbe $\mathbb{P} = \mathbb{NP}$.

ℙ vs ℕℙ



https://en.wikipedia.org/wiki/NP_(complexity)#/media/File:P_np_np-complete_np-hard.svg

Problemi ℕℙ-completi: esistono?

Problema

- Dimostrare che un problema è contenuto in ℕℙ è semplice
- Dimostrare che un problema è ℕℙ-completo richiede una dimostrazione difficile, apparantemente impossibile:

  Tutti i problemi in ℕℙ sono riducibili polinomialmente a tale problema - anche i problemi che non conosciamo!

Fra i problemi visti oggi, quale potrebbe essere un buon candidato?

Teorema di Cook-Levin

Bibliografia

Stephen Cook (1971). "The Complexity of Theorem Proving Procedures". Proceedings of the third annual ACM Symposium on Theory of computing (STOC). pp. 151–158. ACM.

Teorema di Cook-Levin

SAT è ℕℙ-completo

- Dimostrazione complessa, basata sugli stati della macchina di Turing
- Dimostrato nel 1973 da Leonid Levin (URSS) in maniera indipendente

https://it.wikipedia.org/wiki/Stephen_Cook#/media/File:Prof.Cook.jpg

Problemi introdotti oggi

Partendo dalle riduzioni viste oggi e utilizzando il Teorema di Cook-Levin, otteniamo:

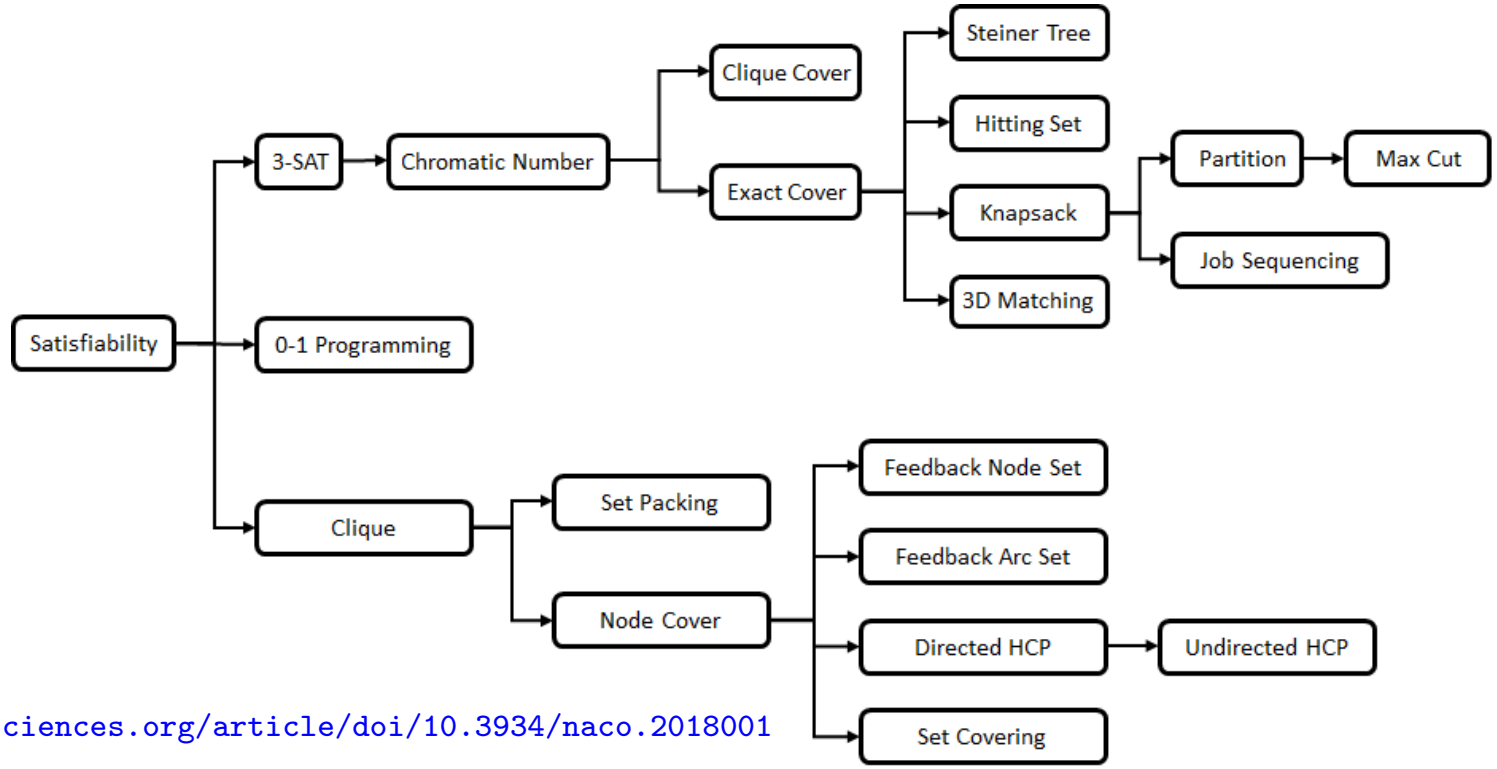
$$\textsc{sat} \leq_p \textsc{3-sat} \leq_p \textsc{independent-set} \leq_p \textsc{vertex-cover} \leq_p \textsc{sat}$$

In altre parole, 3-SAT, INDEPENDENT-SET, VERTEX-COVER sono $\mathbb{NP}$-completi.

I 21 problemi NP-completi di Karp

Bibliografia

Richard Karp (1972). "Reducibility Among Combinatorial Problems". In R. Miller and J. Thatcher (eds). Proc. of Complexity of Computer Computations, pp. 85–103 (Plenum).



http://aimsciences.org/article/doi/10.3934/naco.2018001

NP Compendium

A compendium of NP optimization problems

Editors:
Pierluigi Crescenzi, and **Viggo Kann**

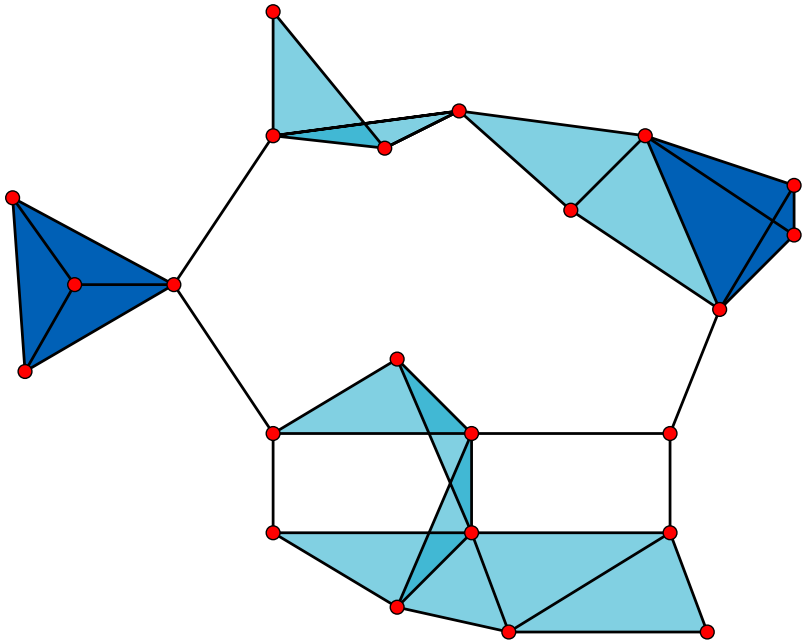
- Introduction
- Graph Theory
  - Covering and Partitioning
  - Subgraphs and Supergraphs
  - Vertex Ordering
  - Iso- and Other Morphisms
  - Miscellaneous
- Network Design
  - Spanning Trees
  - Cuts and Connectivity
  - Routing Problems
  - Flow Problems
  - Miscellaneous

http://www.csc.kth.se/tcs/problemlist.html

Problemi NP-Completi "Classici"

Cricca (CLIQUE)

Dati un grafo non orientato ed un intero k, esiste un sottoinsieme di almeno k nodi tutti mutuamente adiacenti?



Applicazioni

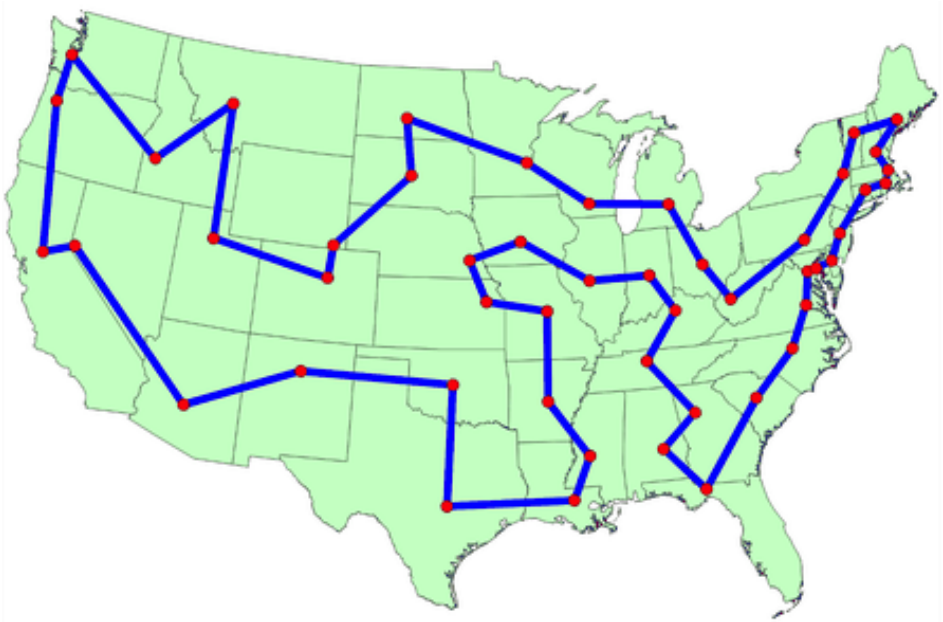
- Bioinformatica
- Ingegneria elettronica
- Chimica

https://en.wikipedia.org/wiki/Clique_(graph_theory)#/media/File:VR_complex.svg

Problemi NP-Completi "Classici"

Commesso viaggiatore (Traveling salesperson - TSP)

Date n città, le distanze tra esse, ed un intero k, è possibile partire da una città, attraversare ogni città esattamente una volta tornando alla città di partenza, percorrendo una distanza non superiore a k?



https://optimization.mccormick.northwestern.edu/images/e/ea/48StatesTSP.png

Problemi NP-Completi "Classici"

Programmazione lineare 0/1

Data una matrice A di elementi interi e di dimensione $m \times n$, ed un vettore b di m elementi interi, esiste un vettore x di n elementi 0/1 tale che $Ax \leq b$?

Esempio

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 2 \\
x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &\leq 0 \\
x_1 \qquad\quad + x_3 + x_4 &\leq 1
\end{aligned}
$$

Il sistema è verificato per $x_1 = x_2 = 1$ ed $x_3 = x_4 = 0$.

Problemi NP-Completi "Classici"

Copertura esatta di insiemi /EXACT COVER

Dato un insieme X e una collezione $\mathcal{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_n\}$ di sottoinsiemi di X, esiste una sottocollezione $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Y}$ che partizioni X?

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$
$$\mathcal{Y} = \{A, B, C, D, E, F\}$$
$$A = \{1, 4, 7\}$$
$$B = \{1, 4\}$$
$$C = \{4, 5, 7\}$$
$$D = \{3, 5, 6\}$$
$$E = \{2, 3, 6, 7\}$$
$$F = \{2, 7\}$$

$$\mathcal{Z} = \{B, D, F\}$$

Problemi NP-Completi "Classici"

Partizione (PARTITION)

Dato un vettore A contenente n interi positivi, esiste un sottoinsieme $S \subseteq \{1 \dots n\}$ tale che $\sum_{i \in S} A[i] = \sum_{i \notin S} A[i]$?

Somma di sottoinsieme (Subset sum)

Dati un vettore A contenente n interi positivi ed un intero positivo k, esiste un sottoinsieme $S \subseteq \dots n\}$ tale che $\sum_{i \in S} a[i] = k$?

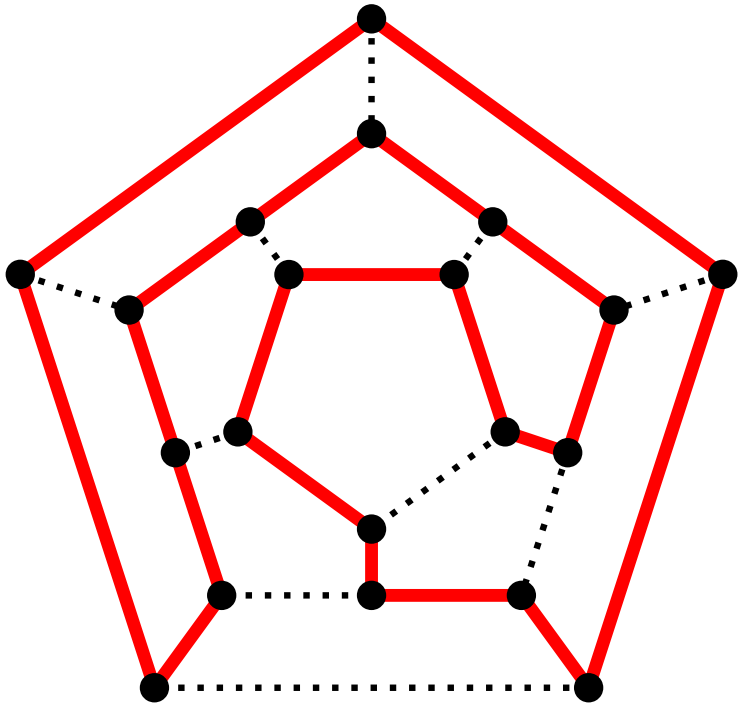
Zaino (KNAPSACK)

Dati un intero positivo C (la capacità dello zaino) e un insieme di n oggetti, tali che l'oggetto i è caratterizzato da un "profitto" $p[i] \in \mathbf{Z}^+$ e da un peso $w[i] \in \mathbf{Z}^+$, esiste un sottoinsieme $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ tale che il peso totale $w(S) = \sum_{i \in S} w[i] \leq C$ e il profitto totale $p(S) = \sum_{i \in S} p[i]$ è maggiore o uguale a k?

Problemi NP-Completi "Classici"

Circuito hamiltoniano (HAMILTONIAN-CIRCUIT)

Dato un grafo non orientato G, esiste un circuito che attraversi ogni nodo una e una sola volta?



https://en.wikipedia.org/wiki/Hamiltonian_path#/media/File:Hamiltonian_path.svg

Problemi NP-completi in altre aree: Economia

- Natural (Nash) equilibrium computation problem is NP-hard; the CLIQUE problem can reduced to it
  - T. Roughgarden. Computing equilibria: a computational complexity perspective. Econ Theory (2010) 42:193–236
- INDEPENDENT-SET could be used in market analysis for independent portfolio selection, where links between stocks represent correlation
  - V. Kalyagin, A. Koldanov, P. Koldanov, V. Zamaraev. Market Graph and Markowitz Model. Optimization in Science and Engineering: In Honor of the 60th Birthday of Panos M. Pardalos. (2014). Pages 293-306.

La complessità si nasconde dove non te l'aspetti...

Circuito hamiltoniano

Dato un grafo non orientato G, esiste un circuito che attraversi ogni nodo una e una sola volta?

ℕℙ-completo

Circuito euleriano

Dato un grafo non orientato G, esiste un circuito che attraversi ogni arco una e una sola volta?

In ℙ

Cammini massimi

Dato un grafo $G = (V, E)$ e una funzione di peso w sugli archi, trovare il cammino con peso massimo

ℕℙ-completo

Cammini minimi

Dato un grafo $G = (V, E)$ e una funzione di peso w sugli archi, trovare il cammino con peso minimo

In ℙ

Problemi aperti (più o meno)

Isomorfismo fra grafi

Il problema dell'isomorfismo fra grafi richiede di determinare se due grafi finiti sono isomorfi.

- Non sappiamo ancora.... $\mathbb{NP}$-completo? $\mathbb{P}$?
- Dibattito ancora in corso (Ottobre 2017)

Primalità

Dato un numero n, determinare se n è primo.

- Incluso in $\mathbb{P}$
- AKS primality test (2002-2005): $\tilde{O}(\log^6 n)$

Fattorizzazione

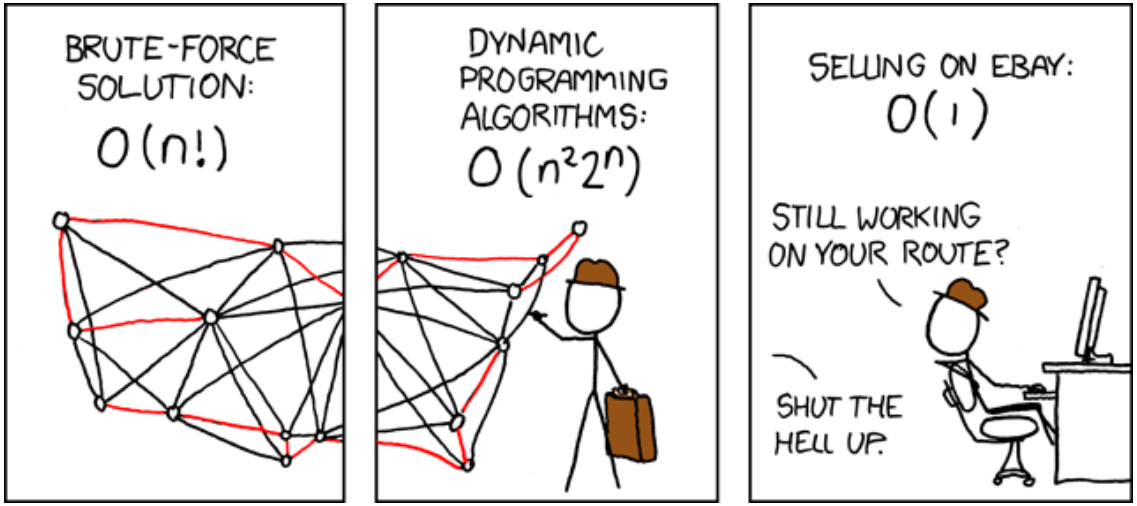
Dato un numero n, individuare i fattori primi che lo compongono.

- Sicuramente in $\mathbb{NP}$, si presume nè in $\mathbb{P}$, nè $\mathbb{NP}$-completo

Spunti di lettura

Bibliografia

- Jeff Erickson, Algorithm. Cap. 12, NP-Hardness
  http://jeffe.cs.illinois.edu/teaching/algorithms/
- Sanjeev Arora, Boaz Barak. Computational complexity: a modern approach. Cambridge University Press, 2009
  http://theory.cs.princeton.edu/complexity/



https://xkcd.com/399/