# Algoritmi e Strutture Dati

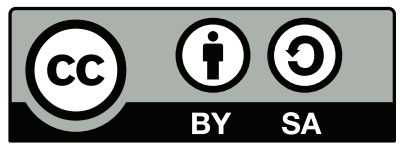
## Backtracking

Alberto Montresor

Università di Trento

2024/08/11





# Sommario

# Esercizio

A mia figlia (prima elementare) è stato chiesto di disegnare tutte le possibili sequenze composte da tre pallini rossi e due pallini gialli.

Voi siete all'università, quindi provate a disegnare tutte le sequenze composte da quattro pallini rossi e tre gialli.

# Soluzioni ammissibili e soluzioni ottime

## Soluzione ammissibile

Dato un problema, una soluzione ammissibile è una soluzione che soddisfa un insieme di criteri

- Zaino: sottoinsieme di oggetti di peso inferiore alla capacità
- Sottosequenza comune: una stringa che è sottosequenza di entrambe le stringhe in input

## Valutare le soluzioni ammissibili

Nei problemi di ottimizzazione, viene definita una funzione di costo/guadagno definita sull'insieme delle soluzioni ammissibili

- Zaino: somma dei guadagni degli oggetti selezionati
- Sottosequenza comune massimale: lunghezza della stringa

# Brute-force

**Esplorazione**

In alcuni problemi è richiesto o necessario esplorare l'intero spazio delle soluzioni ammissibili.

**Enumerazione**

Elencare tutte le soluzioni ammissibili

Esempio: Elencare tutte le permutazioni di un insieme

Soluzione: Algoritmi di enumerazione

$[1, 2, 3]$
$[1, 3, 2]$
$[2, 1, 3]$
$[2, 3, 1]$
$[3, 2, 1]$
$[3, 1, 2]$

# Brute-force

## Esplorazione

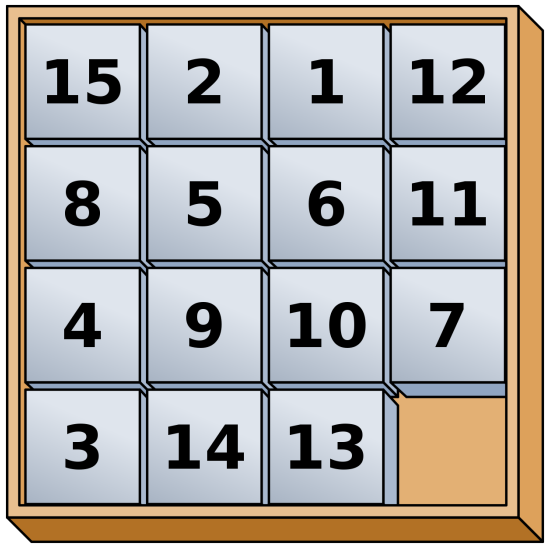
In alcuni problemi è richiesto o necessario esplorare l'intero spazio delle soluzioni ammissibili.

## Ricerca

Trovare una soluzione ammissibile in uno spazio delle soluzioni molto grande

Esempio: Trovare una sequenza di mosse per il gioco del 15

Soluzione: Algoritmi di enumerazione, fermandosi alla prima soluzione trovata




https://it.wikipedia.org/wiki/Gioco_del_quindici#/media/File:15-puzzle.svg

# Brute-force

## Esplorazione

In alcuni problemi è richiesto o necessario esplorare l'intero spazio delle soluzioni ammissibili.

## Conteggio

Contare tutte le soluzioni ammissibili

Esempio: contare il numero di modi in cui è possibile esprimere un valore $n$ come somma di $k$ numeri primi.

Soluzione: Se non è possibile contare in modo analitico, bisogna enumerare tutte le soluzioni ammissibili e contarle.

Input: $n = 23, k = 3$
Output: 2

$$\begin{aligned} 23 &= 3 + 7 + 13 \\ &= 5 + 7 + 11 \end{aligned}$$

# Brute-force

## Esplorazione

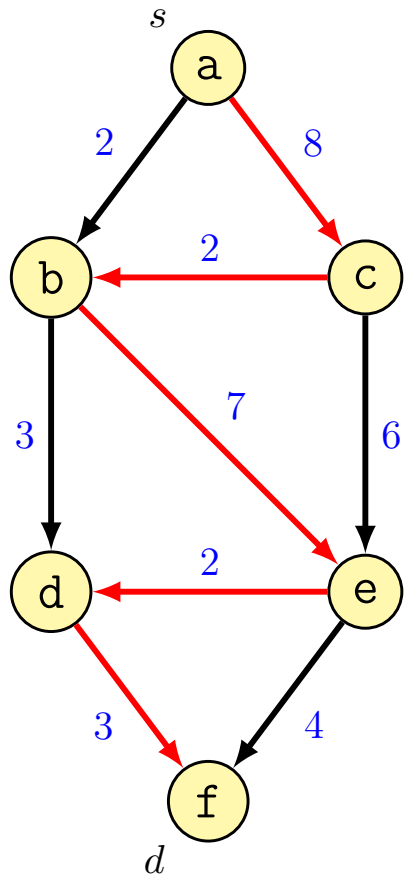
In alcuni problemi è richiesto o necessario esplorare l'intero spazio delle soluzioni ammissibili.

## Ottimizzazione

Trovare una delle soluzioni ammissibili migliori (ottimizzazione) rispetto ad un certo criterio di valutazione

Esempio: trovare il cammino di peso massimo da $s$ a $d$ in un grafo pesato

Soluzione: Enumerare tutti i cammini da $s$ a $d$, restituire quello di peso massimo



# Costruire tutte le soluzioni è costoso

- Lo spazio delle possibili soluzioni può avere dimensione superpolinomiale
- A volte è l'unica strada possibile
- La potenza dei computer moderni rende "affrontabili" problemi di dimensioni medio-piccole
  - $10! = 3.63 \cdot 10^6$ (permutazione di 10 elementi)
  - $2^{20} = 1.05 \cdot 10^6$ (sottoinsieme di 20 elementi)
- A nostro vantaggio, a volte lo spazio delle soluzioni non deve essere analizzato interamente

# Backtracking

## Filosofia

"*Prova a fare qualcosa; se non va bene, disfalo e prova qualcos'altro*"

"*Ritenta, e sarai più fortunato*"

## Ricorsione

Un metodo sistematico per esplorare uno spazio di ricerca, utilizzando la ricorsione per memorizzare le scelte fatte finora

## Iterazione

Utilizza un approccio greedy, eventualmente tornando sui propri passi

- Inviluppo convesso
- String matching

Una tecnica algoritmica che, come altre, deve essere personalizzata per ogni applicazione individuale

# Organizzazione generale

## Organizzazione generale

- Una soluzione viene rappresentata come un vettore di scelte $S[1 \dots n]$
- Il contenuto degli elementi $S[i]$ è preso da un insieme di scelte $C$ dipendente dal problema

## Esempi

- $C$ elementi di un insieme, possibili soluzioni sottoinsiemi di $C$
- $C$ elementi di un insieme, possibili soluzioni permutazioni di $C$
- $C$ mosse di gioco, possibili soluzioni sequenze di mosse
- $C$ archi di un grafo, possibili soluzioni percorsi sul grafo

# Esercizio

## Sottoinsiemi

Prendete carta e penna, e elencate tutti i sottoinsiem dell'insieme $\{A, B, C, D\}$

## Permutazioni

Prendete carta e penna, e elencate tutti le permutazioni dell'insieme $\{A, B, C, D\}$

# Enumerazione – Schema parziale

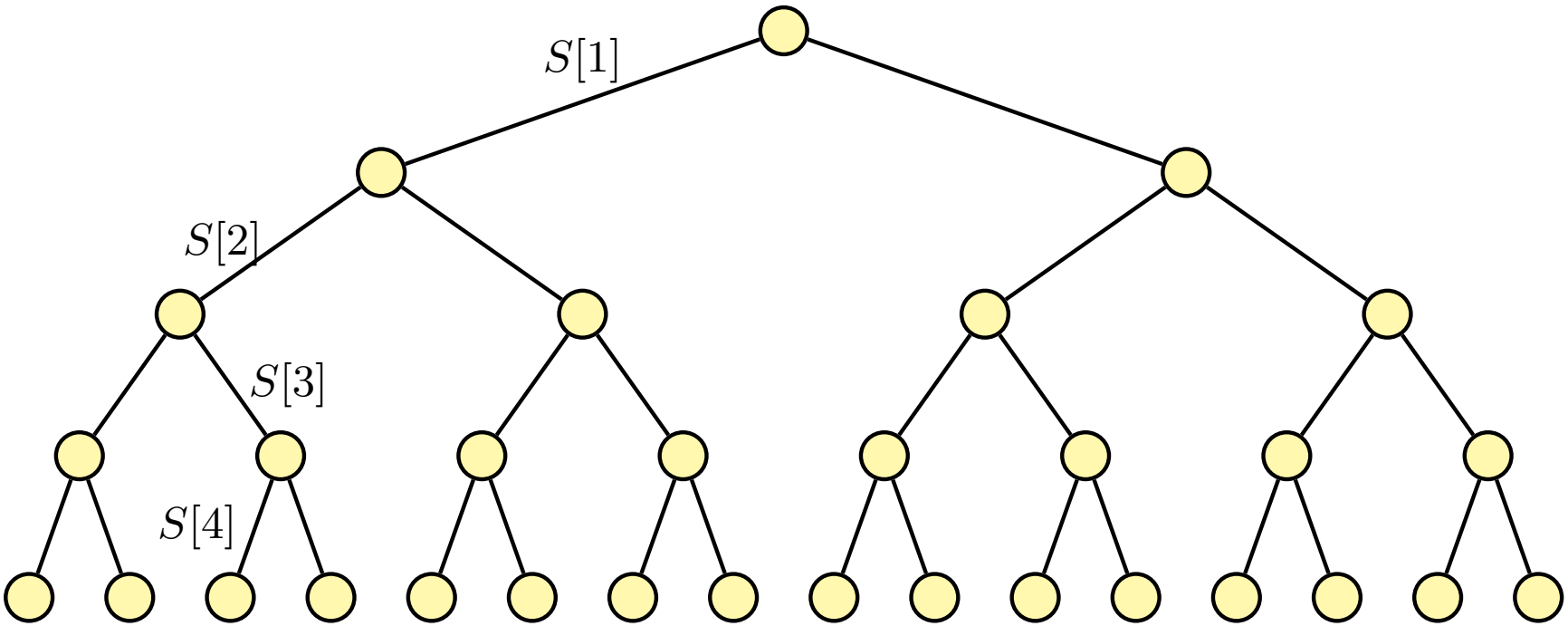
```
enumeration(⟨dati problema⟩, ITEM[] S, int i, ⟨dati parziali⟩)
% Verifica se S[1...i-1] contiene una soluzione ammissibile
if accept(⟨dati problema⟩, S, i, ⟨dati parziali⟩) then
    % "Processa" la soluzione (stampa, conta, etc.)
    processSolution(⟨dati problema⟩, S, i, ⟨dati parziali⟩)
else
    % Calcola l'insieme delle scelte in funzione di S[1...i-1]
    SET C = choices(⟨dati problema⟩, S, i, ⟨dati parziali⟩)
    % Itera sull'insieme delle scelte
    foreach c ∈ C do
        S[i] = c
        % Chiamata ricorsiva
        enumeration(⟨dati problema⟩, S, i+1, ⟨dati parziali⟩)
```

# Soluzioni parziali

- Il parametro $i$ rappresenta l'indice della prossima decisione da prendere
- La soluzione parziale $S[1 \dots i-1]$ contiene le decisioni prese finora
- Caso base:
  - Se $S[1 \dots i-1]$ è una soluzione ammissibile, questa viene processata
  - Assumendo che le soluzioni ammissibili non possano essere estese, la ricorsione termina
- Passo ricorsivo
  - Altrimenti, calcoliamo l'insieme $C$ delle scelte possibili
  - Per ogni elemento $c \in C$:
    - Scriviamo $c$ sulla scelta $S[i]$
    - Chiamiamo ricorsivamente la funzione con indice $i+1$

# Albero delle decisioni

- Albero di decisione ≡ Spazio di ricerca
- Radice ≡ Soluzione parziale vuota
- Nodi interni dell'albero di decisione ≡ Soluzioni parziali
- Foglie in un albero di decisione ≡ Soluzioni ammissibili



# Sottoinsiemi

Elencare tutti i sottoinsiemi dell'insieme $\{1, \ldots, n\}$

subsetsRec(**int** $n$, **int**[ ] $S$, **int** $i$)

```
% S ammissibile dopo n scelte
if i > n then
    processSolution(S, n)
else
    % Non presente / presente
    SET C = {0, 1}
    foreach c ∈ C do
        S[i] = c
        subsetsRec(n, S, i + 1)
```

subsets(**int** $n$)

```
% Vettore delle scelte
int[] S = new int[1...n]
subsetsRec(n, S, 1)
```

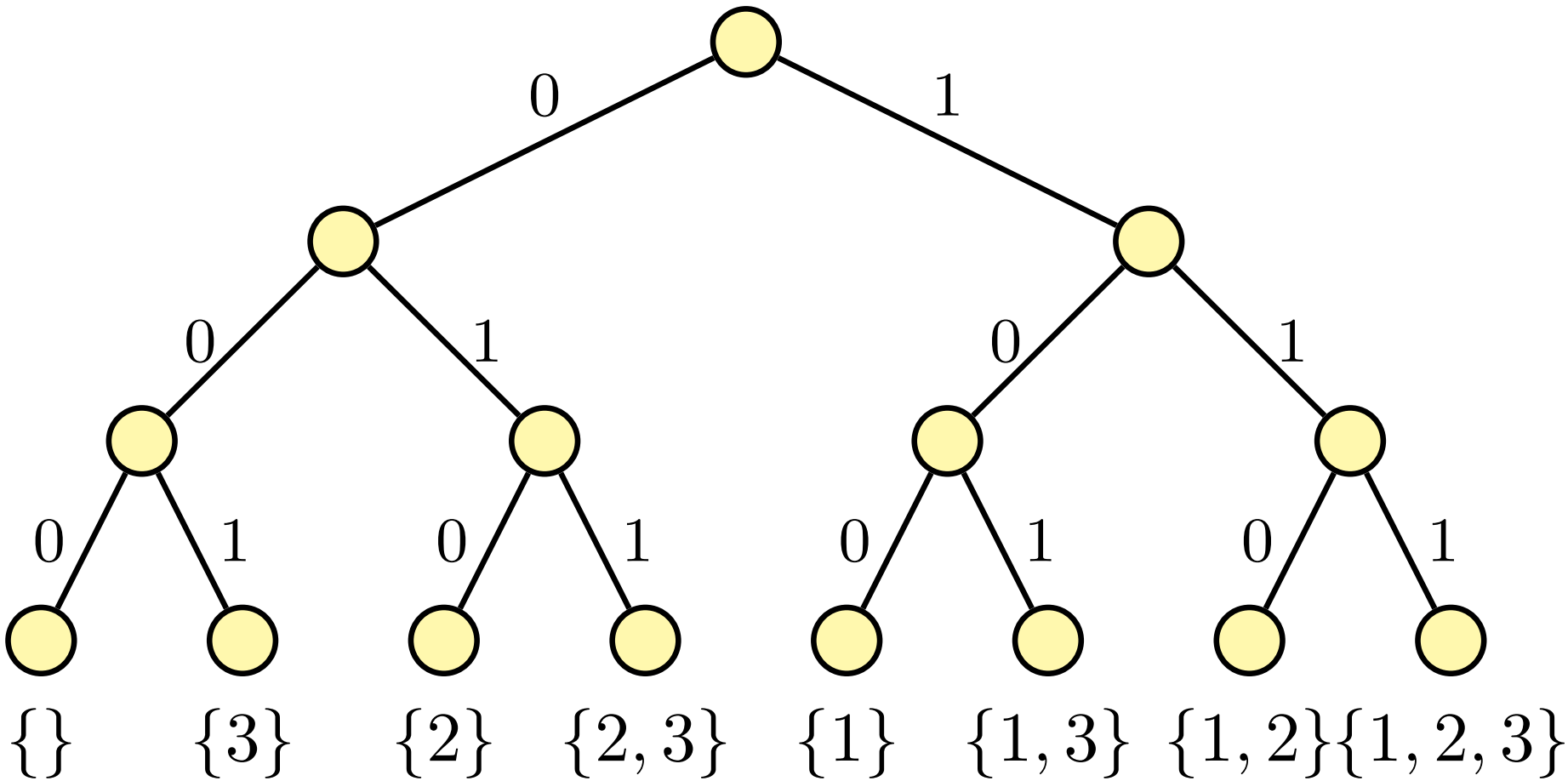
processSolution(**int**[ ] $S$, **int** $n$)

```
print "{ "
for i = 1 to n do
    if S[i] then
        print i, " "
println "}"
```

# Sottoinsiemi – Note

- Come richiesto dal problema, tutto lo spazio possibile viene esplorato
- Complessità $\Theta(n \cdot 2^n)$
- In che ordine vengono stampati gli insiemi?

# Sottoinsiemi – Albero delle decisioni



# Sottoinsiemi – Versione iterativa

È possibile risolvere questo problema in modo iterativo?

---

subsets(**int** $n$)

---

```
for j = 0 to 2^n − 1 do
    print "{ "
    for i = 0 to n − 1 do
        if (j && 2^i) ≠ 0 then                % Bitwise and
            print i, " "
    println "}"
```

---

Complessità: $\Theta(n \cdot 2^n)$

# Permutazioni

Stampa tutte le permutazioni di un insieme $A$

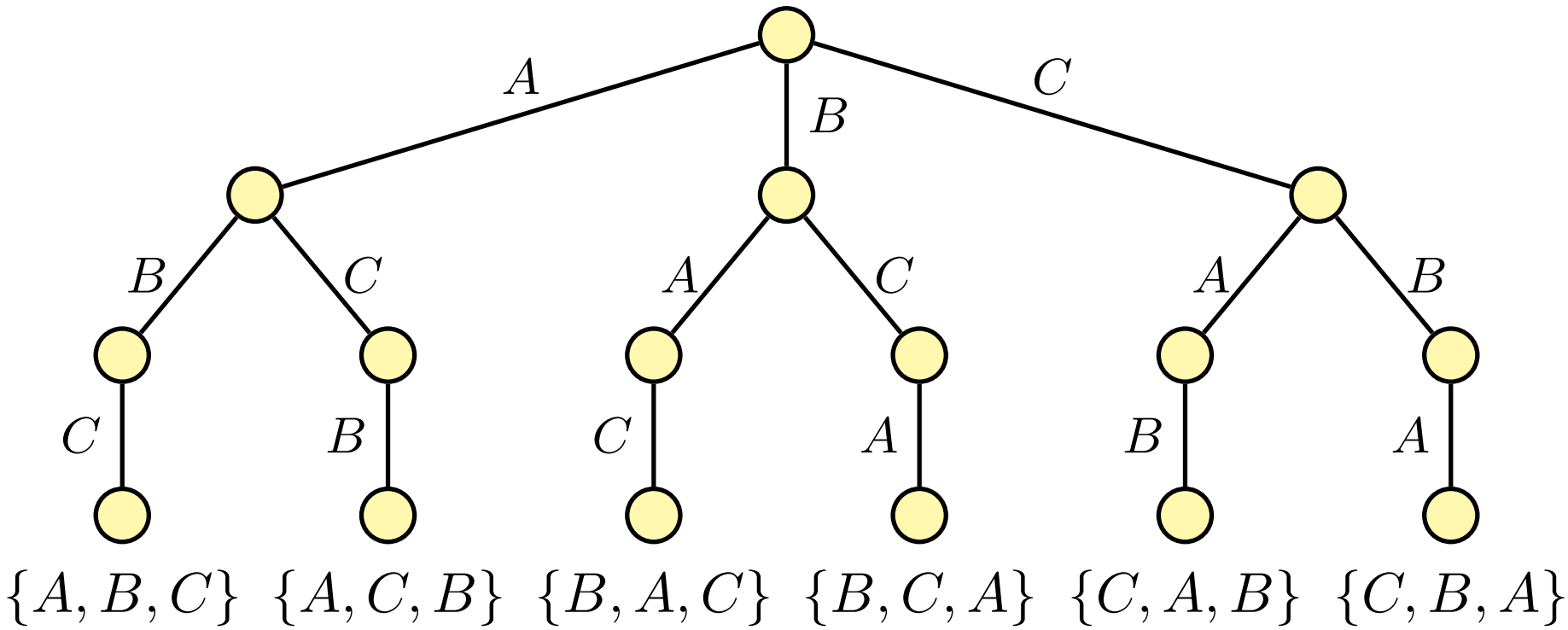
permRec(SET $A$, ITEM[ ] $S$, **int** $i$)

```
% Se A è vuoto, S è ammissibile
if A.isEmpty() then
    print S
else
    % Copia A per il ciclo foreach
    SET C = copy(A)
    foreach c ∈ C do
        S[i] = c
        A.remove(c)
        permRec(A, S, i + 1)
        A.insert(c)
```

permutations(SET $A$)

```
int n = size(A)
int[ ] S = new int[1 ... n]
permRec(A, S, 1)
```

# Permutazioni – Albero delle decisioni



# Permutazioni – Complessità

## Complessità

- Costo della stampa: $\Theta(n)$
- Costo delle copie del vettore lungo un cammino radice-foglia: $\sum_{i=1}^{n} O(i) = O(n^2)$
- Numero di foglie: $n!$
- Complessità $O(n^2 n!)$

# Permutazioni – Complessità

## Altre implementazioni

- L'algoritmo più efficiente per generare le permutazioni è l'Algoritmo di Heap
  - B.R. Heap. [a] "Permutations by Interchanges". The Computer Journal, 6(3):293-294. (1963) [Link]
- Per i più coraggiosi, Knuth affronta il problema delle permutazioni nel suo Art of Computer Programming [b]
  - Knuth, Donald. "Section 7.2.1.2: Generating All Permutations", The Art of Computer Programming, volume 4A. (2011) [Link]

[a] Sì, esiste un tizio che si chiama Heap di cognome...

[b] Solo 66 pagine!

# Permutazioni – Una versione più pulita

Stampa tutte le permutazioni di un vettore $S$

permRec(ITEM[] $S$, **int** $i$)

```
% Caso base, un elemento
if i == 1 then
    println S
else
    for j = 1 to i do
        swap(S, i, j)
        permRec(S, i − 1)
        swap(S, i, j)
```

permutations(ITEM[] $S$, **int** $n$)

permRec($S, n$)

**Complessità**

- $n!$ permutazioni
- $\Theta(n)$ per stamparle tutte
- $2n$ swap per ogni permutazione
- Costo totale $\Theta(n \cdot n!)$

# Enumerazione – Schema completo

```
enumeration(⟨dati problema⟩, ITEM[] S, int i, ⟨dati parziali⟩)
if accept(⟨dati problema⟩, S, i, ⟨dati parziali⟩) then
    % Processo la soluzione S in quanto ammissibile
    processSolution(⟨dati problema⟩, S, i, ⟨dati parziali⟩)
else if reject(⟨dati problema⟩, S, i, ⟨dati parziali⟩) then
    return
else
    % Ricorsione
    SET C = choices(⟨dati problema⟩, S, i, ⟨dati parziali⟩)
    foreach c ∈ C do
        S[i] = c
        enumeration(⟨dati problema⟩, S, i + 1, ⟨dati parziali⟩)
```

# $k$-Sottoinsiemi – Tentativo 1

Elencare tutti i sottoinsiemi di $k$ elementi di un insieme $\{1, \ldots, n\}$

kssRec(**int** $n$, **int** $k$, **int**[ ] $S$, **int** $i$)

```
int size = count(S, n)
if i > n and size == k then
    processSolution(S, n)
else if i > n and size ≠ k then
    return
else
    foreach c ∈ {0, 1} do
        S[i] = c
        kssRec(n, k, S, i + 1)
```

kSubsets(**int** $n$, **int** $k$)

```
int[ ] S = new int[1 ... n]
kssRec(n, k, S, 1)
```

**int** count(**int**[ ] $S$, **int** $n$)

```
int count = 0
for j = 1 to n do
    count = count + S[j]
return count
```

# $k$-Sottoinsiemi – Tentativo 2

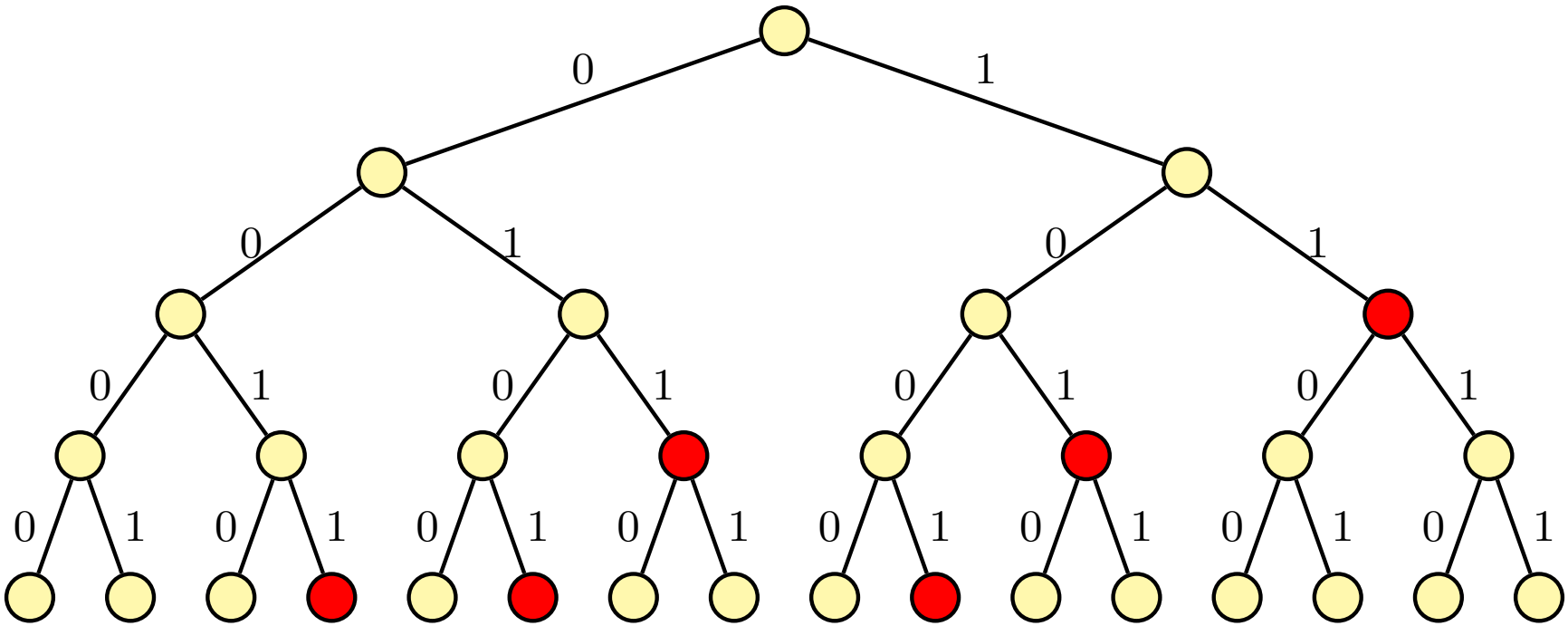
kssRec(**int** $n$, **int** *missing*, **int**[ ] $S$, **int** $i$)

```
if i > n and missing == 0 then
    processSolution(S, n)
else if i > n and missing ≠ 0 then
    return
else
    foreach c ∈ {0, 1} do
        S[i] = c
        kssRec(n, missing − c, S, i + 1)
```

**Note**

- Evitiamo di ricontare tutte le volte i bit 1

# $k$-Sottoinsiemi – Albero delle decisioni, per $n = 4, k = 2$



**Note**

- Questa soluzione suggerisce un ulteriore miglioramento...
- I nodi rossi sono nodi in cui *missing* diventa uguale a zero per la prima volta nel percorso radice–foglia

# $k$-Sottoinsiemi – Tentativo 3 (Pruning parziale)

kssRec(**int** $n$, **int** $missing$, **int**[ ] $S$, **int** $i$)

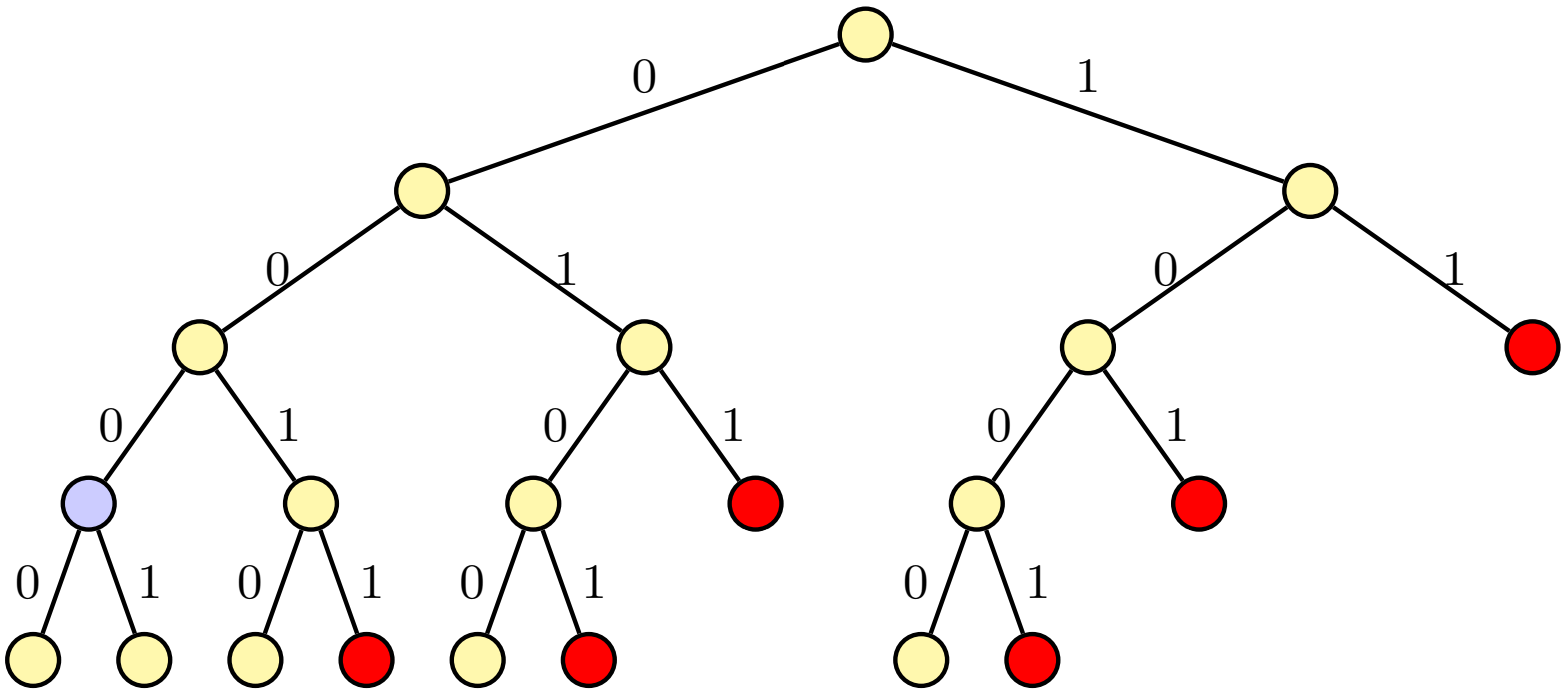
```
if i > n and missing == 0 then
    processSolution(S, i − 1)
else if i > n or missing < 0 then
    return
else
    foreach c ∈ {0, 1} do
        S[i] = c
        kssRec(n, missing − c, S, i + 1)
```

**Note**

- Se $missing = 0$, la soluzione è ammissibile
- Non ha senso continuare oltre

# Pruning – Esempio: $n = 4, k = 2$

- "Rami" dell'albero che sicuramente non portano a soluzioni ammissibili possono essere "potati" (pruned)
- La valutazione viene fatta nelle soluzioni parziali radici del sottoalbero da potare



# $k$-Sottoinsiemi – Tentativo 4 (Pruning totale)

kssRec(**int** $n$, **int** $missing$, **int**[ ] $S$, **int** $i$)

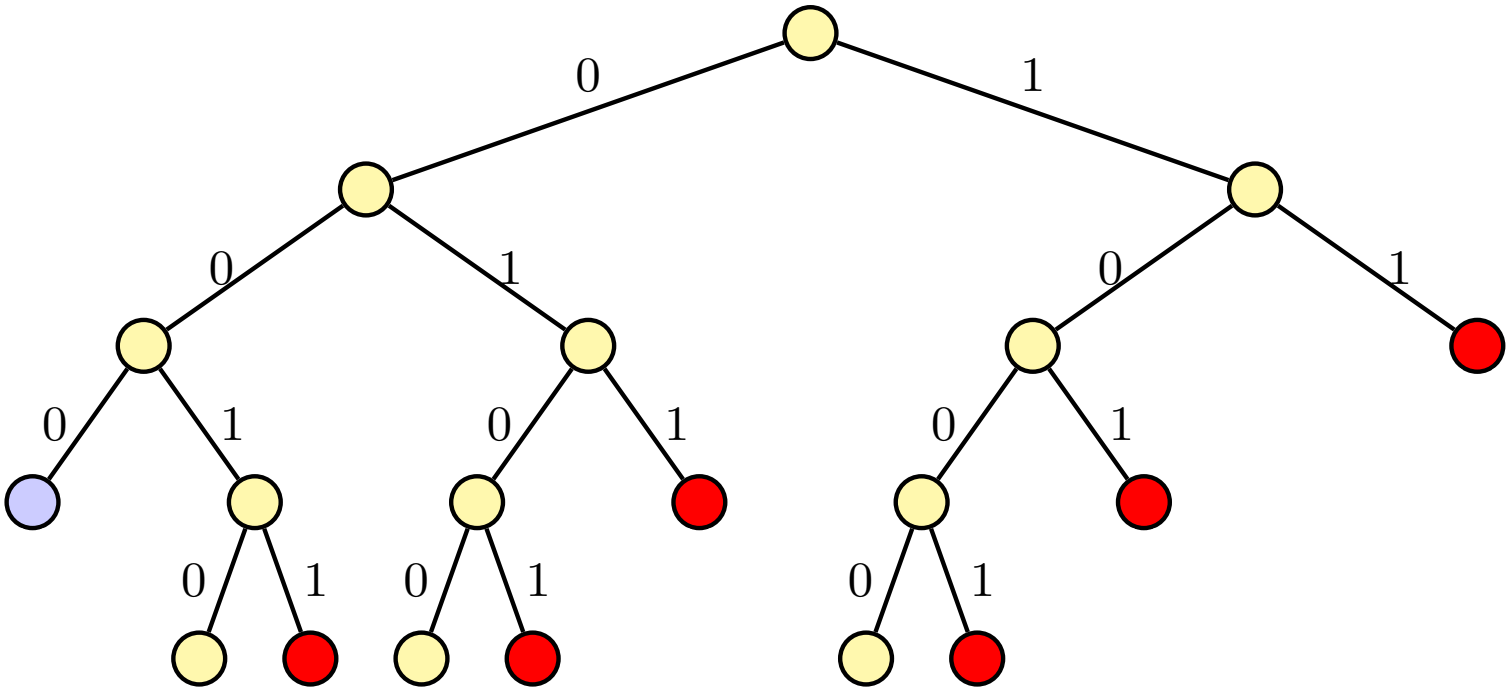
```
if missing == 0 then
    processSolution(S, i − 1)
else if i > n or missing < 0 or n − (i − 1) < missing then
    return
else
    foreach c ∈ {0, 1} do
        S[i] = c
        kssRec(n, missing − c, S, i + 1)
```

**Note**

- Evitiamo di proseguire in rami che non possono dare origine alla soluzione

# $k$-Sottoinsiemi – Albero delle decisioni, per $n = 4, k = 2$

- I nodi interni in azzurro rappresentano i nodi che non possono dare origine a soluzioni

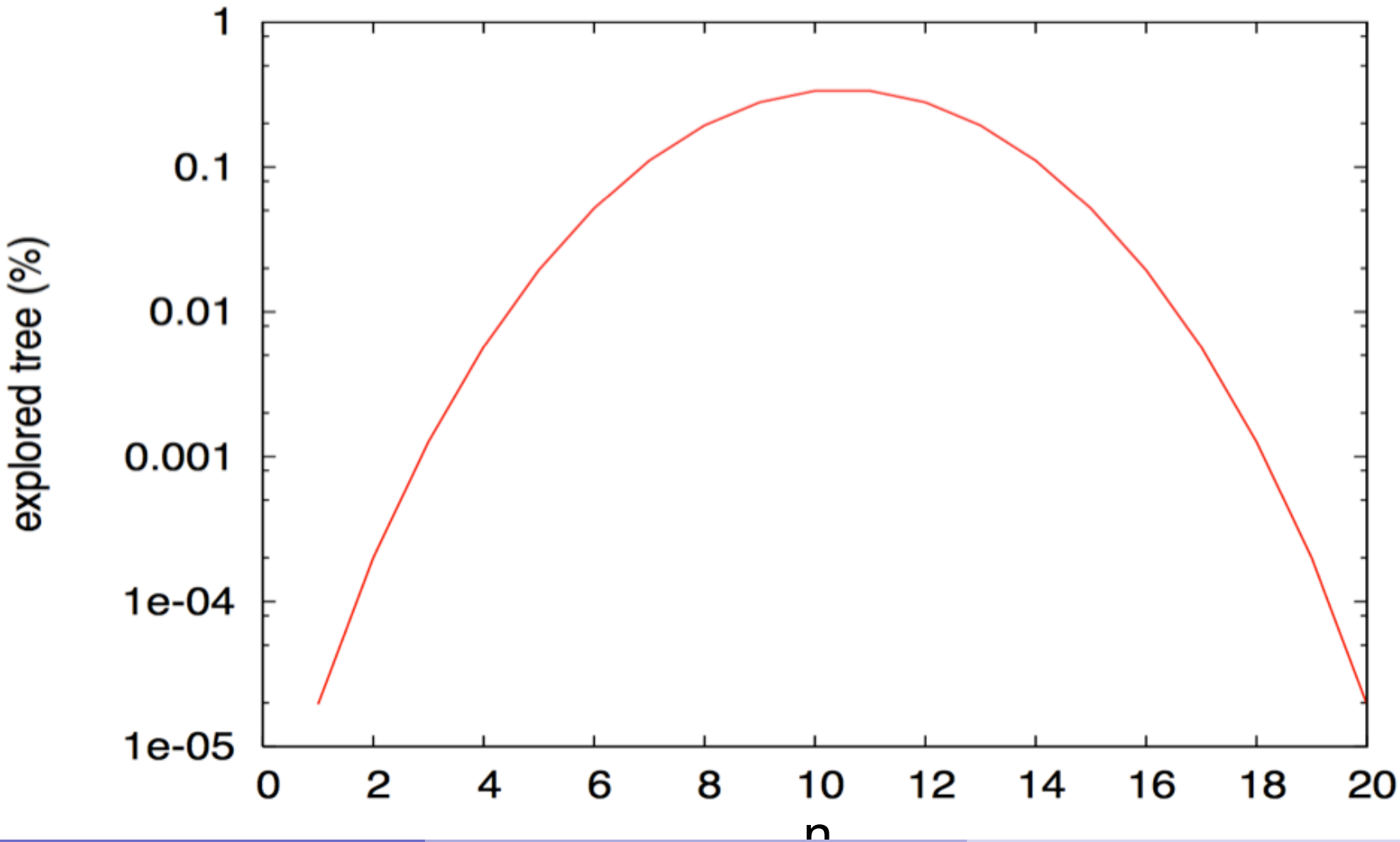


# $k$-Sottoinsiemi – Tentativo 5 (Clean-up)

kssRec(**int** $n$, **int** $missing$, **int**[ ] $S$, **int** $i$)

**if** $missing == 0$ **then**
    processSolution($S, i-1$)
**else if** $i \leq n$ **and** $0 < missing \leq n-(i-1)$ **then**
    **foreach** $c \in \{0,1\}$ **do**
        $S[i] = c$
        kssRec($n, missing - c, S, i+1$)

# $k$-Sottoinsiemi – Vantaggi



# $k$-Sottoinsiemi – Sommario

Cosa abbiamo imparato?

- "Specializzando" l'algoritmo generico, possiamo ottenere una versione più efficiente
- Versione efficiente per
  - valori di $k$ "piccoli" (vicini a 1)
  - valori di $k$ "grandi" (vicini a $n$)
- Miglioramento solo parziale verso $n/2$
- Possiamo ottenere la stessa efficienza con un algoritmo iterativo?

# Subset Sum

## Somma di sottoinsieme (Subset sum)

Dati un vettore $A$ contenente $n$ interi positivi ed un intero positivo $k$, esiste un sottoinsieme $S \subseteq \{1 \dots n\}$ tale che $\sum_{i \in S} a[i] = k$?

| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 4 | 3 | 12 | 7 | 2 | 21 | 55 |

$$k = 23$$

$$S_1 = \{2, 4, 5\}$$

$$S_2 = \{6, 7\}$$

# Subset Sum

## Analisi del problema

- Lo risolviamo qui tramite backtracking in tempo $O(2^n)$
- Può essere risolto tramite programmazione dinamica in tempo $O(kn)$
  - Questa complessità è pseudo-polinomiale
  - Ci torneremo sopra
- Non siamo interessati a tutte le soluzioni, ce ne basta una
- Interrompiamo l'esecuzione alla prima soluzione trovata

# Enumerazione – Interruzione alla prima soluzione

```
enumeration(⟨dati problema⟩, ITEM[] S, int i, ⟨dati parziali⟩)
if accept(⟨dati problema⟩, S, i, ⟨dati parziali⟩) then
    processSolution(⟨dati problema⟩, S, i, ⟨dati parziali⟩)
    return true                    % Trovata soluzione, restituisco true
else if reject(⟨dati problema⟩, S, i, ⟨dati parziali⟩) then
    return false  % Impossibile trovare soluzioni, restituisco false
else
    SET C = choices(⟨dati problema⟩, S, i, ⟨dati parziali⟩)
    foreach c ∈ C do
        S[i] = c
        if enumeration(⟨dati problema⟩, S, i + 1, ⟨dati parziali⟩) then
            return true            % Trovata soluzione, restituisco true
    return false                   % Nessuna soluzione, restituisco false
```

# Subset sum

```
boolean ssRec(int[] A, int n, int missing, int[] S, int i)
if missing == 0 then
    processSolution(S, i − 1)        % Stampa gli indici della soluzione
    return true
else if i > n or missing < 0 then
    return false                     % Terminati i valori o somma eccessiva
else
    foreach c ∈ {0, 1} do
        S[i] = c
        if ssRec(A, n, missing − A[i] · c, S, i + 1) then
            return true
    return false
```

# Subset sum

---

subsetSum(**int**[ ] $A$, **int** $n$, **int** $k$)

---

**int**[ ] $S$ = **new** **int**$[1 \ldots n]$

ssRec$(A, n, k, S, 1)$

---

**Note**

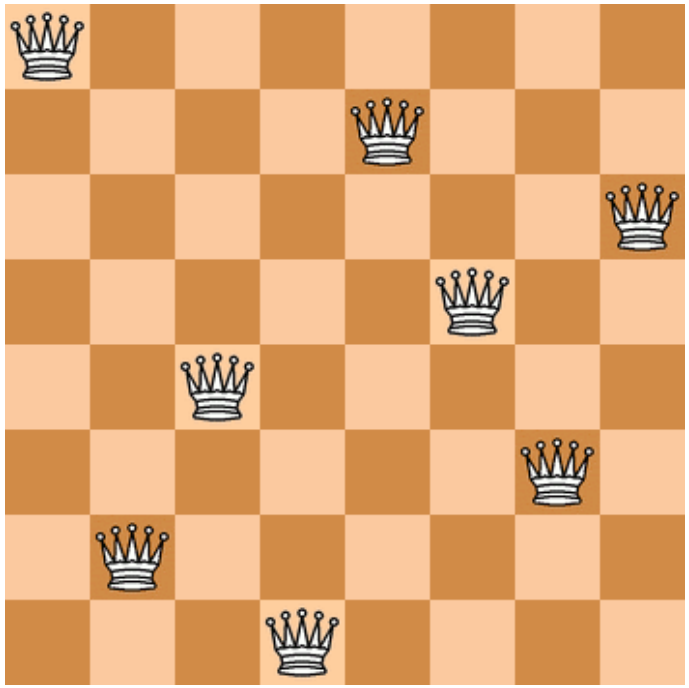
Avendo informazioni sulle somme cumulative, sarebbe possibile potare ulteriormente

# Problema delle otto regine

**Problema**

Posizionare $n$ regine in una scacchiera $n \times n$, in modo tale che nessuna regina ne "minacci" un'altra.

- Un po' di storia:
  - Introdotto da Max Bezzel (1848)
  - Gauss trovò 72 delle 92 soluzioni
- Partendo da un approccio "stupido", raffiniamo mano a mano la soluzione
- L'idea è mostrare l'effetto della modellazione sull'efficenza



https://en.wikipedia.org/wiki/Eight_queens_puzzle

# Problema delle otto regine

Idea: Ci sono $n^2$ caselle dove piazzare una regina

| | |
|---|---|
| $S[1 \dots n^2]$ array binario | $S[i] = \textbf{true} \Rightarrow$ "regina in $S[i]$" |
| controllo soluzione | se $i = n^2$ |
| $\mathsf{choices}(S, n, i)$ | $\{\textbf{true}, \textbf{false}\}$ |
| pruning | se la nuova regina minaccia una delle regine esistenti, restituisce $\emptyset$ |
| # soluzioni per $n = 8$ | $2^{64} \approx 1.84 \cdot 10^{19}$ |

## Commenti

- Forse abbiamo un problema di rappresentazione?
- Matrice binaria molto sparsa

# Problema delle otto regine

Idea: Dobbiamo piazzare $n$ regine, ci sono $n^2$ caselle

| | |
|---|---|
| $S[1 \dots n]$ coordinate in $\{1 \dots n^2\}$ | $S[i]$ coordinata della regina $i$ |
| controllo soluzione | se $i = n$ |
| $\mathsf{choices}(S, n, i)$ | $\{1 \dots n^2\}$ |
| pruning | restituisce il sottoinsieme di mosse legali |
| # soluzioni per $n = 8$ | $(n^2)^n = 64^8 = 2^{48} \approx 2.81 \cdot 10^{14}$ |

## Commenti

- C'è un miglioramento, ma lo spazio è ancora grande ...
- Problema: come si distingue una soluzione "1-7-..." da "7-1-..." ?

# Problema delle otto regine

Idea: non mettere regine in caselle precedenti a quelle già scelte

| | |
|---|---|
| $S[1 \dots n]$ coordinate in $\{1 \dots n^2\}$ | $S[i]$ coordinata della regina $i$ |
| controllo soluzione | se $i = n$ |
| $\mathsf{choices}(S, n, i)$ | $\{1 \dots n^2\}$ |
| pruning | restituisce mosse legali, $S[i] > S[i-1]$ |
| # soluzioni per $n = 8$ | $(n^2)^n/n! = 2^{48}/40320 \approx 6.98 \cdot 10^9$ |

**Commenti**

- Ottimo, abbiamo ridotto molto, ma si può ancora fare qualcosa

# Problema delle otto regine

Idea: ogni riga della scacchiera deve contenere esattamente una regina

| | |
|---|---|
| $S[1 \dots n]$ coordinate in $\{1 \dots n\}$ | $S[i]$ colonna della regina $i$, dove riga $= i$ |
| controllo soluzione | se $i = n$ |
| $\mathsf{choices}(S, n, i)$ | $\{1 \dots n\}$ |
| pruning | restituisce le colonne legali |
| # soluzioni per $n = 8$ | $n^n = 8^8 \approx 1.67 \cdot 10^7$ |

**Commenti**

- Quasi alla fine

# Problema delle otto regine

Idea: anche ogni colonna deve contenere esattamente una regina

| | |
|---|---|
| $S[1 \dots n]$ coordinate in $\{1 \dots n\}$ | permutazione di $\{1 \dots n\}$ |
| controllo soluzione | se $i = n$ |
| choices$(S, n, i)$ | $\{1 \dots n\}$ |
| pruning | elimina le diagonali |
| # soluzioni per $n = 8$ | $n! = 8! = 40320$ |

**Commenti**

- Soluzioni effettivamente visitate = 15720

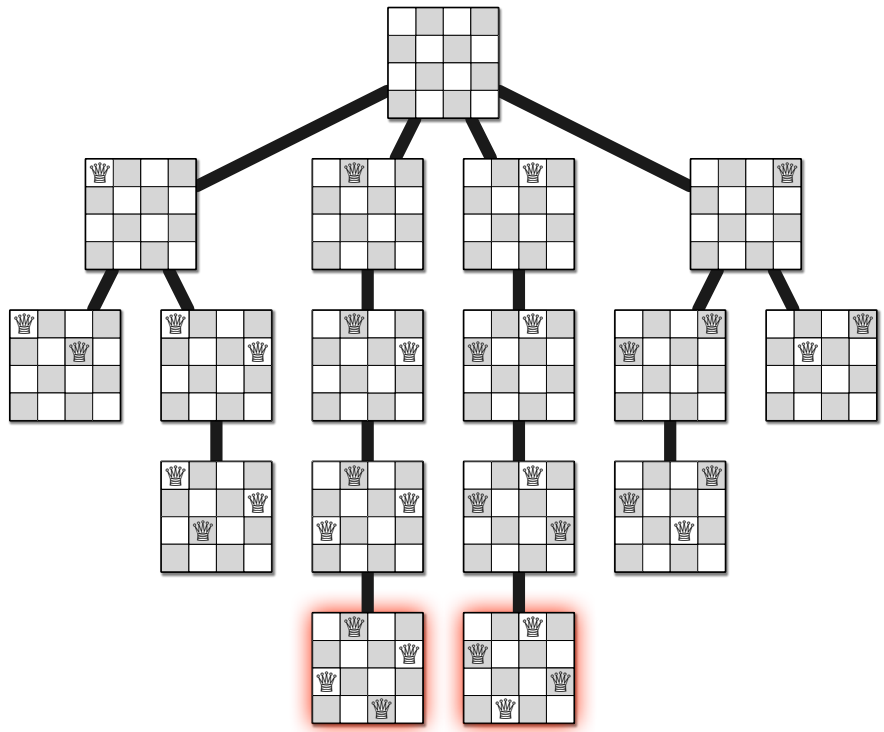
# Problema delle $n$ regine

```
queens(int n, int[] S, int i)
if i > n then
    print S
else
    for j = 1 to n do  % Prova a piazzare la regina nella colonna j
        boolean legal = true
        for k = 1 to i − 1 do          % Verifica le regine precedenti
            if S[k] == j or S[k] == j + i − k or S[k] == j − i + k then
                legal = false
        if legal then
            S[i] = j
            queens(n, S, i + 1)
```

# Problema delle $n$ regine

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| #Sol | 1 | 0 | 0 | 2 | 10 | 4 | 40 | 92 | 352 | 724 | 2680 | 14200 |

- In alto, il numero di soluzioni al variare di $n$
- A destra, l'albero della ricorsione per $n = 4$



(Jeff Erickson)

# Problema delle $n$ regine

## Minimum-conflicts heuristic

Si parte da una soluzione iniziale "ragionevolmente buona", e si muove il pezzo con il più grande numero di conflitti nella casella della stessa colonna che genera il numero minimo di conflitti. Si ripete fino a quando non ci sono più pezzi da muovere.

- Algoritmo in tempo lineare
- Ad esempio, con $n = 1\,000\,000$, richiede 50 passi in media
- Questo algoritmo non garantisce che il risultato sia corretto
  - Greedy (Capitolo 14)
  - Ricerca locale (Capitolo 15)
  - Algoritmi probabilistici (Capitolo 17)
  - Soluzioni per problemi intrattabili (Capitolo 19)

# Sudoku - "Suuji wa dokushin ni kagiru"

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 5 | | | 9 | | | 7 | 6 |
| | | | 2 | | 4 | | | |
| | | 1 | 5 | | 3 | 9 | | |
| | 8 | 9 | 4 | | 5 | 2 | 6 | |
| 1 | | | | 2 | | | | 4 |
| | 2 | 5 | 6 | | | 7 | 3 | |
| | | 8 | 3 | | 2 | 1 | | |
| | | | 9 | | 7 | | | |
| 3 | 7 | | | 8 | | | 9 | 2 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 5 | 3 | 8 | 9 | 1 | 4 | 7 | 6 |
| 8 | 9 | 7 | 2 | 6 | 4 | 3 | 1 | 5 |
| 6 | 4 | 1 | 5 | 7 | 3 | 9 | 2 | 8 |
| 7 | 8 | 9 | 4 | 3 | 5 | 2 | 6 | 1 |
| 1 | 3 | 6 | 7 | 2 | 9 | 8 | 5 | 4 |
| 4 | 2 | 5 | 6 | 1 | 8 | 7 | 3 | 9 |
| 9 | 6 | 8 | 3 | 5 | 2 | 1 | 4 | 7 |
| 5 | 1 | 2 | 9 | 4 | 7 | 6 | 8 | 3 |
| 3 | 7 | 4 | 1 | 8 | 6 | 5 | 9 | 2 |

# Sudoku

```
boolean sudoku(int[][] S, int i)
if i == 81 then
    processSolution(S, n)
    return true
int x = i mod 9
int y = ⌊i/9⌋
Set C = moves(S, x, y)
int old = S[x][y]
foreach c ∈ C do
    S[x][y] = c
    if sudoku(S, i + 1) then
        return true
S[x][y] = old
return false
```

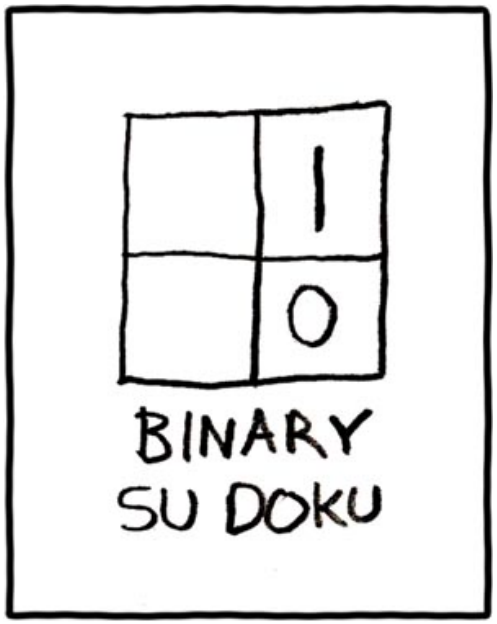
```
Set moves(int[][] S, int x, int y)
Set C = Set()
if S[x][y] ≠ 0 then
    % Numero pre-inserito
    C.insert(S[x][y])
else
    % Verifica conflitti
    for c = 1 to 9 do
        if check(S, x, y, c) then
            C.insert(c)
return C
```

# Sudoku

```
boolean check(int[][] S, int x, int y, int c)
for j = 0 to 8 do
    if S[x][j] == c then
        return false                          % Controllo sulla colonna
    if S[j][y] == c then
        return false                          % Controllo sulla riga
int b_x = ⌊x/3⌋
int b_y = ⌊y/3⌋
for i_x = 0 to 2 do
    for i_y = 0 to 2 do                       % Controllo sulla sottotabella
        if S[b_x · 3 + i_x][b_y · 3 + i_y] = c then
            return false
return true
```

# Sudoku

- La soluzione proposta è molto veloce per $n = 9$
  - Nel mio portatile, codice in Java: il Sudoku iniziale richiede 0.1 secondi
- È possibile generalizzare per $n = k^2$
  - $k = 4$, Mega-Sudoku (Esadecimale)
- Esistono tecniche euristiche per fissare ulteriori numeri
  - Possono risolvere completamente il problema
  - Possono essere usate come pre-processamento
  - Tom Davis, "The Mathematics of Sudoku" [Link]

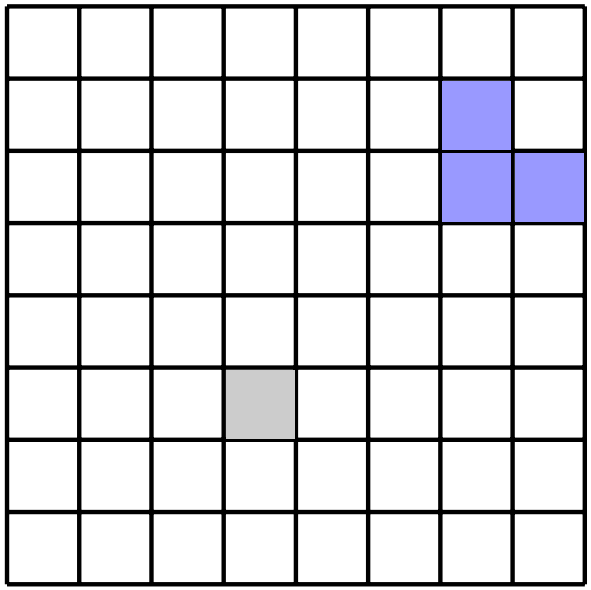



https://xkcd.com/74/

# Un ulteriore puzzle

**Problema**

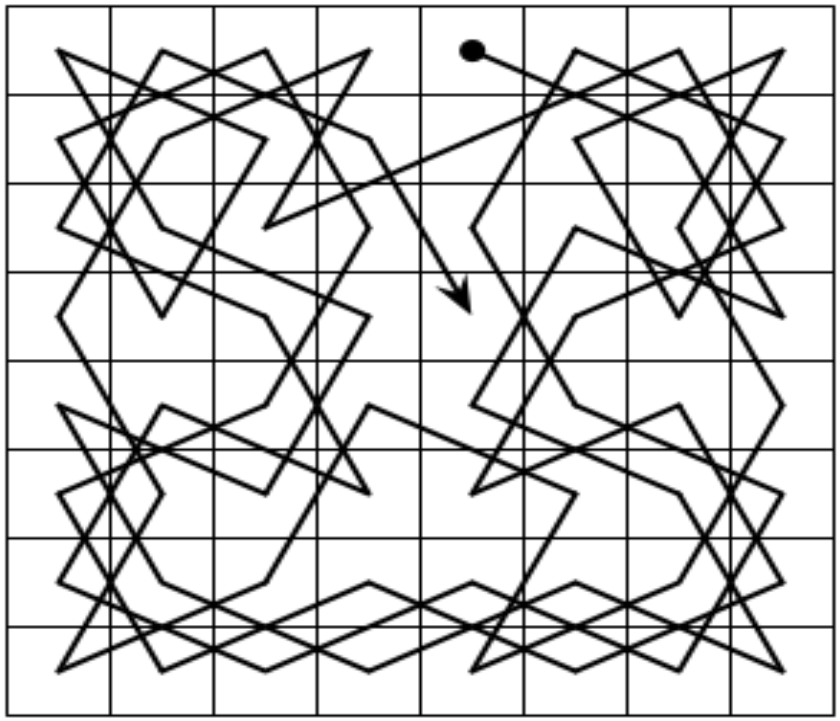
- Si consideri una scacchiera $n \times n$, con $n = 2^k$
- Qualsiasi scacchiera di questo tipo con una cella rimossa può essere ricoperta da triomini a forma di L
- Trovare un algoritmo che trovi una possibile ricopertura della scacchiera



# Knight tour

**Problema**

Si consideri ancora una scacchiera $n \times n$; lo scopo è trovare un "giro di cavallo", ovvero un percorso di mosse valide del cavallo in modo che ogni casella venga visitata al più una volta



# Knight tour

**Soluzione**

Matrice $n \times n$ le cui celle contengono:

- 0 se la cella non è mai stata visitata
- $i$ se la cella è stata visitata al passo $i$-esimo

# Knight tour

**boolean** knightTour(**int**[][] $S$, **int** $i$, **int** $x$, **int** $y$)

```
% Se i = 64, ho fatto 63 mosse e ho completato un tour (aperto)
if i == 64 then
    processSolution(S)
    return true
SET C = moves(S, x, y)
foreach c ∈ C do
    S[x][y] = i
    if knightTour(S, i + 1, x + m_x[c], y + m_y[c]) then
        return true;
    S[x][y] = 0
return false
```

# Knight tour

---

SET moves(**int**[ ][ ] $S$, **int** $x$, **int** $y$)

---

SET $C$ = Set()
**for** $i = 1$ **to** $8$ **do**
    $n_x = x + m_x[i]$
    $n_y = y + m_y[i]$
    **if** $1 \leq n_x \leq 8$ **and** $1 \leq n_y \leq 8$ **and** $S[n_x][n_y] == 0$ **then**
        $C$.insert($i$)
**return** $C$

---

$$m_x = \{-1, +1, +2, +2, +1, -1, -2, -2\}$$
$$m_y = \{-2, -2, -1, +1, +2, +2, +1, -1\}$$

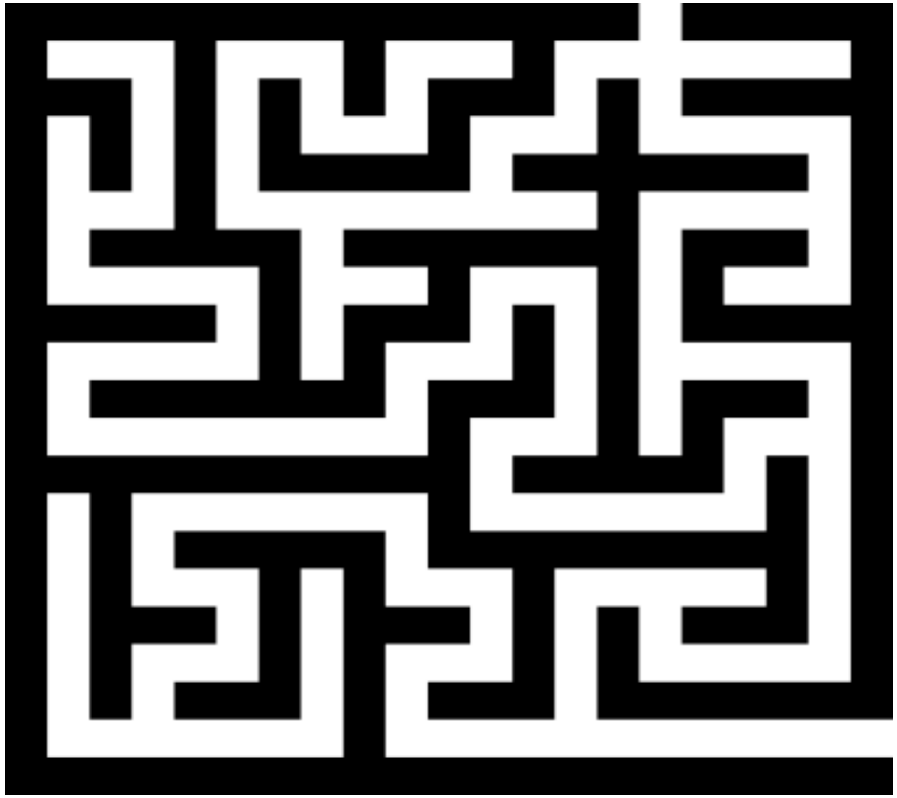
# Knight tour – Considerazioni su efficienza

- Ad ogni passo ho al massimo 8 caselle possibili, quindi ne visito al più $8^{63} \approx 7.84 \cdot 10^{55}$
- Grazie al pruning ne visito molto meno, ma resta comunque un problema non affrontabile per valori grandi di $n$
- È un esempio del più generale "problema del cammino hamiltoniano", per il quale non esistono soluzioni polinomiali
- Per questo particolare problema, tuttavia, esistono degli algoritmi di costo lineare nel numero di caselle
  https://en.wikipedia.org/wiki/Knight%27s_tour

# Generazione labirinti

## Problemi

- Come generare un labirinto in una griglia $n \times n$?
- Come uscire da un labirinto?



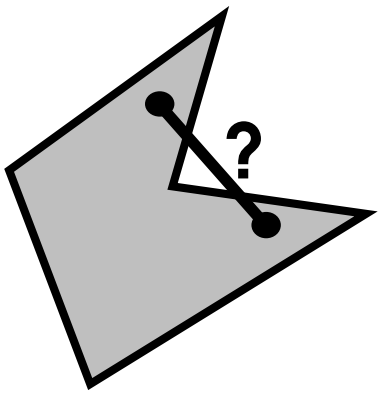
# Inviluppo convesso (Convex Hull)

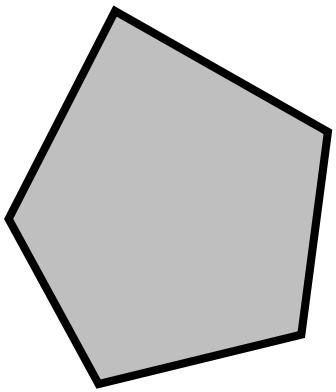
## Poligono convesso

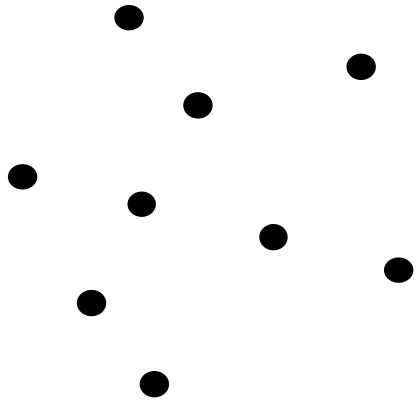
Un poligono nel piano è convesso se ogni segmento di retta che congiunge due punti del poligono sta interamente nel poligono stesso (bordo incluso).

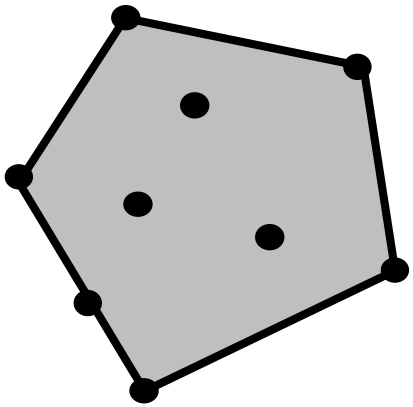
## Inviluppo convesso

Dati $n$ punti $p_1, \ldots, p_n$ nel piano, con $n \geq 3$, l'inviluppo convesso (convex hull) è, fra tutti i poligoni convessi che li contengono tutti, quello di superficie minima.



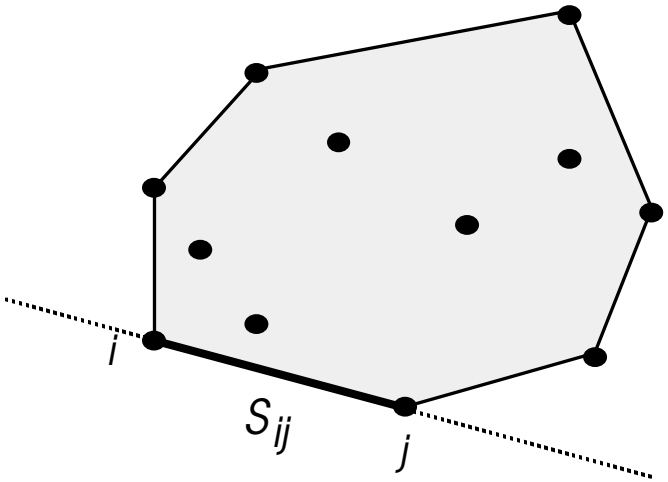



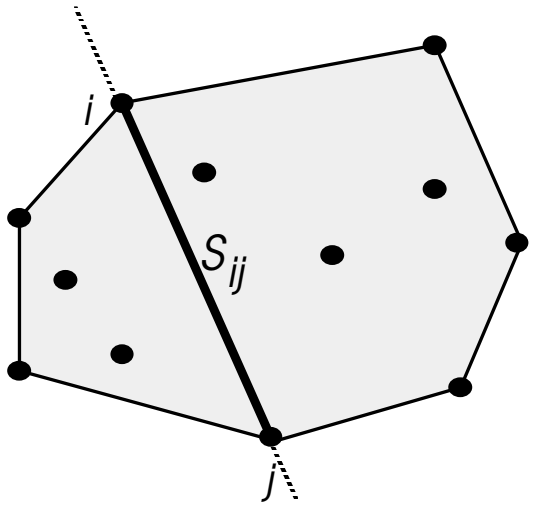




# Algoritmo inefficiente – $O(n^3)$

- Un poligono può essere rappresentato per mezzo dei suoi spigoli
- Si consideri la retta che passa per una coppia di punti $p_i, p_j$, che divide il piano in due semipiani chiusi ($O(n^2)$ coppie)
- Se tutti i rimanenti $n-2$ punti stanno "dalla stessa parte", allora lo spigolo $S_{ij}$ fa parte dell'inviluppo convesso

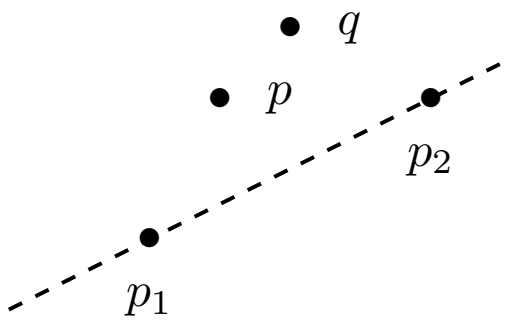


# "Stessa parte"

**Problema**

Data una retta definita dai punti $p_1$ e $p_2$, determinare se due punti $p$ e $q$ stanno nello stesso semipiano definito dalla retta.




---

**boolean** sameSide(POINT $p_1$, POINT $p_2$, POINT $p$, POINT $q$)

---

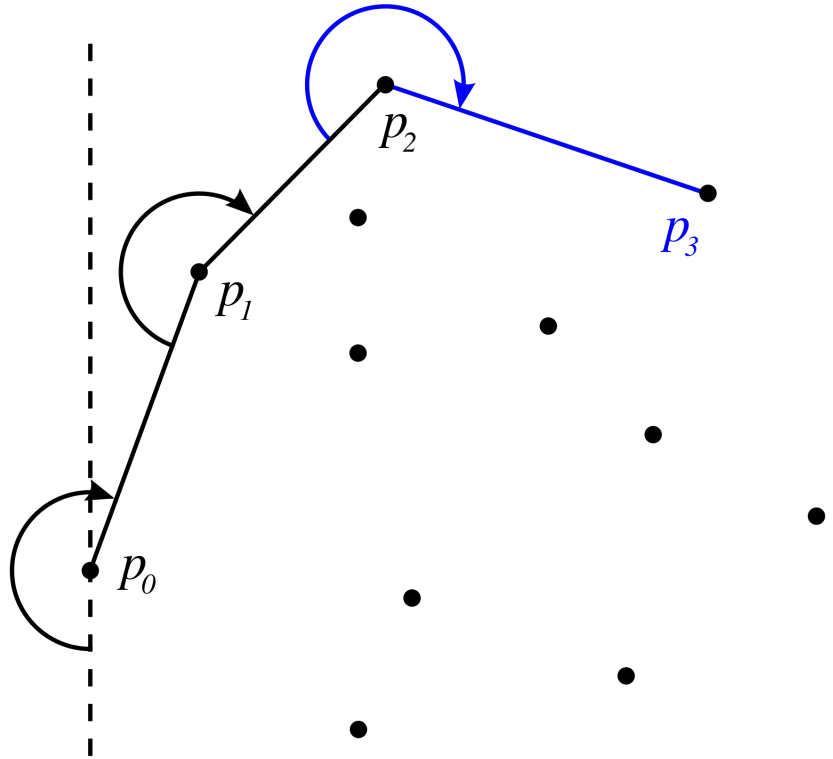
**float** $dx = p_2.x - p_1.x$
**float** $dy = p_2.y - p_1.y$
**float** $dx_1 = p.x - p_1.x$
**float** $dy_1 = p.y - p_1.y$
**float** $dx_2 = q.x - p_2.x$
**float** $dy_2 = q.y - p_2.y$
**return** $((dx \cdot dy_1 - dy \cdot dx_1) \cdot (dx \cdot dy_2 - dy \cdot dx_2) \geq 0)$

---

# Algoritmo di Jarvis (Gift Packing) – $O(nh)$

Punti 0,1

- Si assegna a $p_0$ il punto più a sinistra, che appartiene all'inviluppo convesso ($O(n)$)
- Si calcola l'angolo della retta passante per $p_0$ e ogni altro punto $p_j$ rispetto alla retta verticale ($O(n)$)
- Si seleziona come punto $p_1$ il punto con angolo minore (costo $O(n)$)

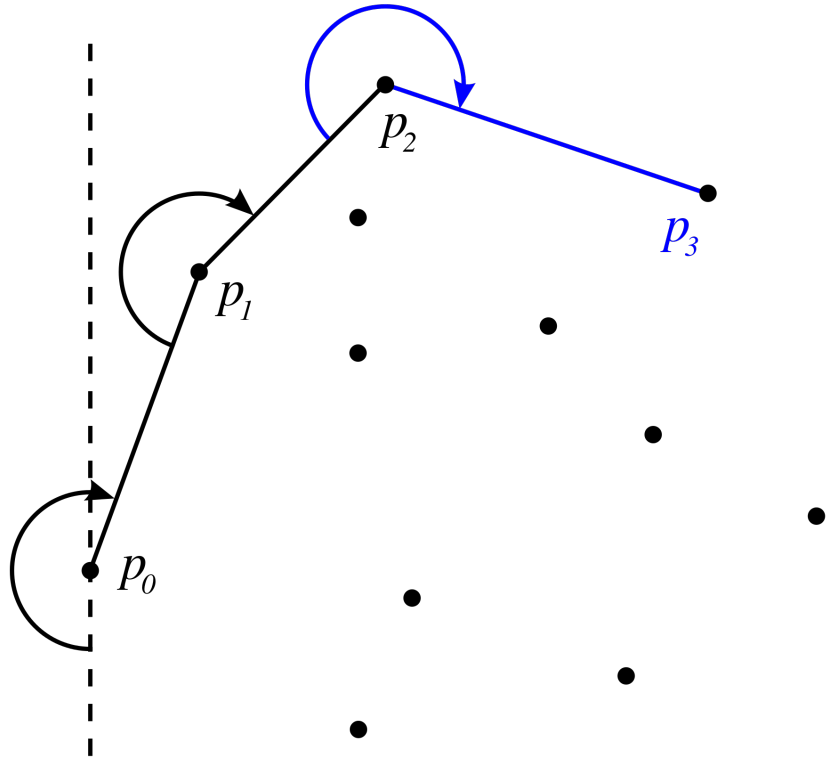



https://en.wikipedia.org/wiki/Gift_wrapping_algorithm#/media/File:Jarvis_march_convex_hull_algorithm_diagram.svg

# Algoritmo di Jarvis (Gift Packing) – $O(nh)$

**Punto $i$**

- Si considera la retta $r$ passante per i punti $p_{i-1}, p_{i-2}$
- Si calcola l'angolo passante per $p_{i-1}$ e ogni altro punto non considerato e la retta $r$
- Si seleziona come punto $p_i$ il punto con angolo minore
- Costo per ogni spigolo: $O(n)$

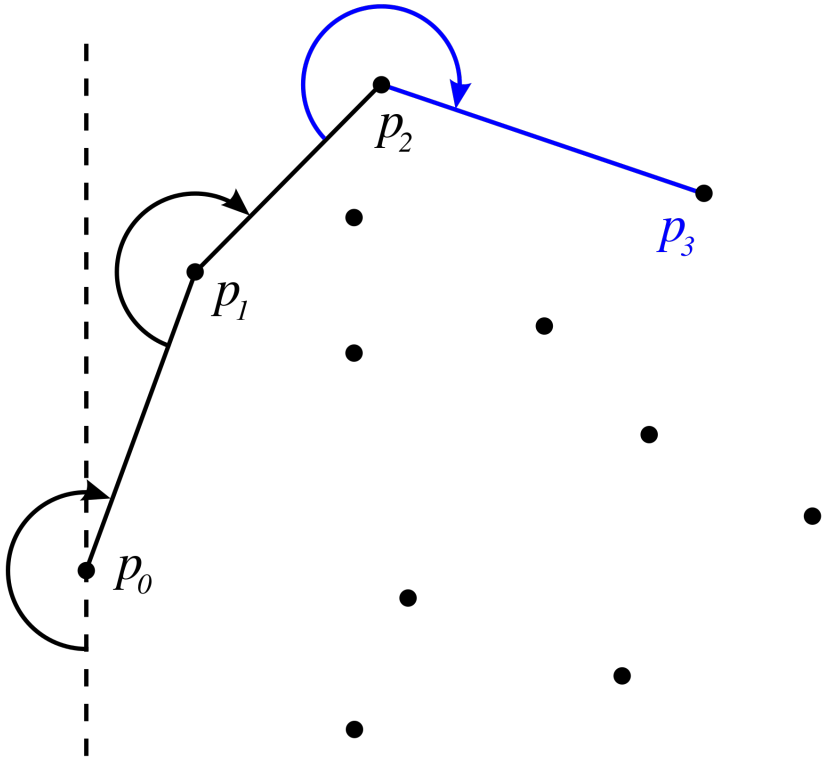



https://en.wikipedia.org/wiki/Gift_wrapping_algorithm#/media/File:Jarvis_march_convex_hull_algorithm_diagram.svg

# Algoritmo di Jarvis (Gift Packing) – $O(nh)$

## Terminazione

- Si termina quando si torna al punto $p_0$
- L'algoritmo ha costo $O(nh)$, dove $h$ è il numero di spigoli

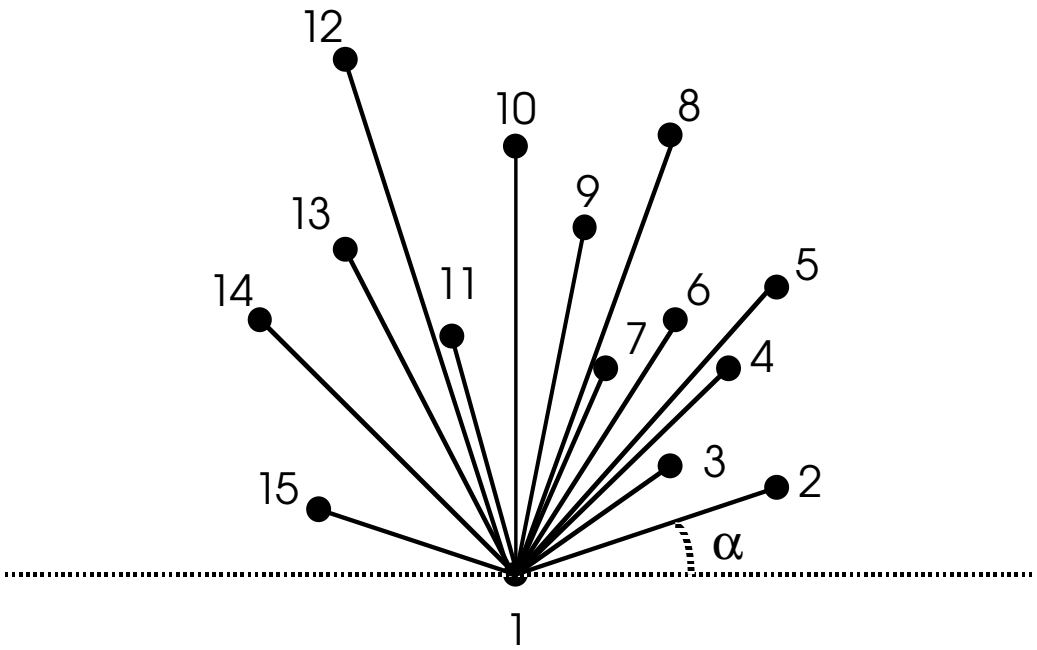



https://en.wikipedia.org/wiki/Gift_wrapping_algorithm#/media/File:Jarvis_march_convex_hull_algorithm_diagram.svg

# Algoritmo di Graham

**Fase 1**

- Il punto con ordinata minima fa parte dell'inviluppo convesso
- Si ordinano i punti in base all'angolo formato dalla retta passante per il punto con ordinata minima e la retta orizzontale



# Algoritmo di Graham

---

STACK graham(POINT[ ] $p$, **int** $n$)

---

**int** $min = 1$
**for** $i = 2$ **to** $n$ **do**
  **if** $p[i].y < p[min].y$ **then**
    $min = i$
$p[1] \leftrightarrow p[min]$
{ riordina $p[2, \ldots n]$ in base all'angolo formato rispetto all'asse orizzontale quando sono connessi con $p[1]$ }
{ elimina eventuali punti "allineati" tranne i più lontani da $p_1$, aggiornando $n$ }
[...]

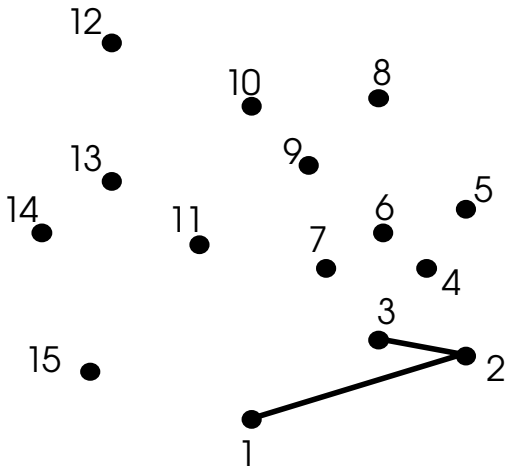
---

# Algoritmo di Graham

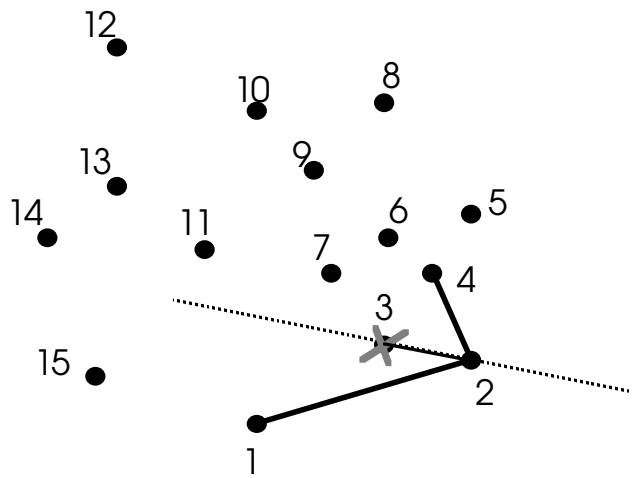
## Fase 2

- Inserisci $p_1, p_2$ nell'inviluppo corrente
- Per tutti i punti $p_i = 3, \ldots, n$:
  - Siano $p_{j-1}$ e $p_j$ il penultimo e ultimo vertice dell'inviluppo corrente
  - Se $\mathsf{sameSide}(p_{j-1}, p_j, p_1, p_i) = \textbf{false}$, ovvero $p_1$ e $p_i$ non si trovano dalla stessa parte rispetto alla retta passante per $p_{j-1}$ e $p_j$, allora elimina $p_j$ dall'inviluppo corrente
  - Termina tale "scansione" se $p_j$ non deve essere eliminato
  - aggiungi $p_i$ all'inviluppo "corrente"

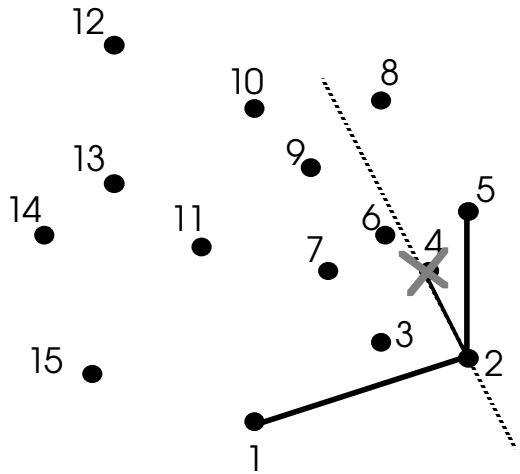
# Algoritmo di Graham



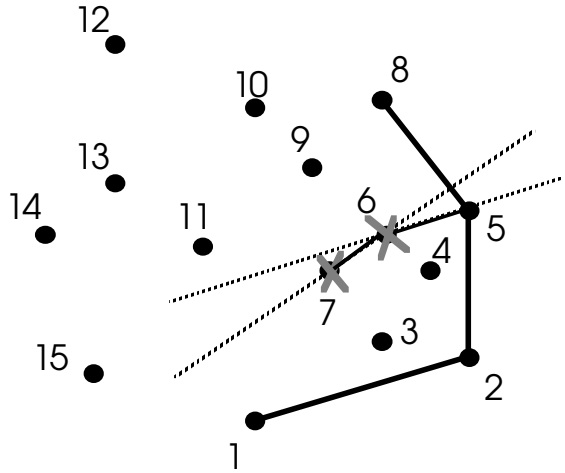

$i = 3$




$i = 4$




$i = 5$




$i = 8$

# Algoritmo di Graham

STACK graham(POINT[] $p$, **int** $n$) (continua)

```
STACK S = Stack()
S.push(p_1); S.push(p_2)
for i = 3 to n do
    while not sameSide(S.top(), S.top2(), p_1, p_i) do
        S.pop()
    S.push(p_i)
return S
```

# Algoritmo di Graham – Complessità

**Complessità:** $O(n \log n)$

- Il calcolo degli angoli richiede $O(n)$
- L'ordinamento richiede $O(n \log n)$
- La rimozione di punti con angolo uguale richiede $O(n)$
- Ogni punto viene aggiunto/rimosso al massimo una volta (costo $O(n)$)

# Conclusioni

| **Algoritmo** | **Note** | **Compl.** |
|---|---|---|
| Gift packing | $h$ numero di punti nell'inviluppo convesso (1973) | $O(nh)$ |
| Graham | Backtracking iterativo (1972) | $O(n \log n)$ |
| Monotone Chain | Come Graham, ma senza angoli (1979) | $O(n \log n)$ |
| Preparata, Hong | Divide et impera (1977) | $O(n \log n)$ |
| Chan | Graham + Jarvis (1996) | $O(n \log h)$ |

# Conclusioni

> "Convex hull is the favorite paradigm of computational geometers. Although the description of the problem is fairly simple, its solution takes into account all aspects of computational geometry."

O. Devillers (1996)