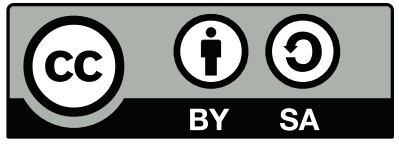
Algoritmi e Strutture Dati

Algoritmi greedy

Alberto Montresor

Università di Trento

2024/08/11



Sommario

Introduzione

Problemi di ottimizzazione

- Gli algoritmi per problemi di ottimizzazione eseguono una sequenza di decisioni

Programmazione dinamica

- In maniera bottom-up, valuta tutte le decisioni possibili
- Evitando però di ripetere sotto-problemi (decisioni) già percorse

Algoritmi greedy (ingordi, golosi)

- Seleziona una sola delle possibile decisioni...
- ... quella che sembra ottima (ovvero, è localmente ottima)
- È però necessario dimostrare che si ottien un ottimo globale

Quando applicare la tecnica greedy?

Se è possibile dimostrare che esiste una scelta ingorda

"*Fra le molte scelte possibili, ne può essere facilmente individuata una che porta sicuramente alla soluzione ottima.*"

Se il problema ha sottostruttura ottima

"*Fatta tale scelta, resta un sottoproblema con la stessa struttura del problema principale.*"

Note

- Non tutti i problemi hanno una scelta ingorda
- In alcuni casi, soluzioni non ottime possono essere comunque interessanti

Insieme indipendente massimale di intervalli

Input

Sia $S = \{1, 2, ..., n\}$ un insieme di intervalli della retta reale. Ogni intervallo $[a_i, b_i[$, con $i \in S$, è chiuso a sinistra e aperto a destra.

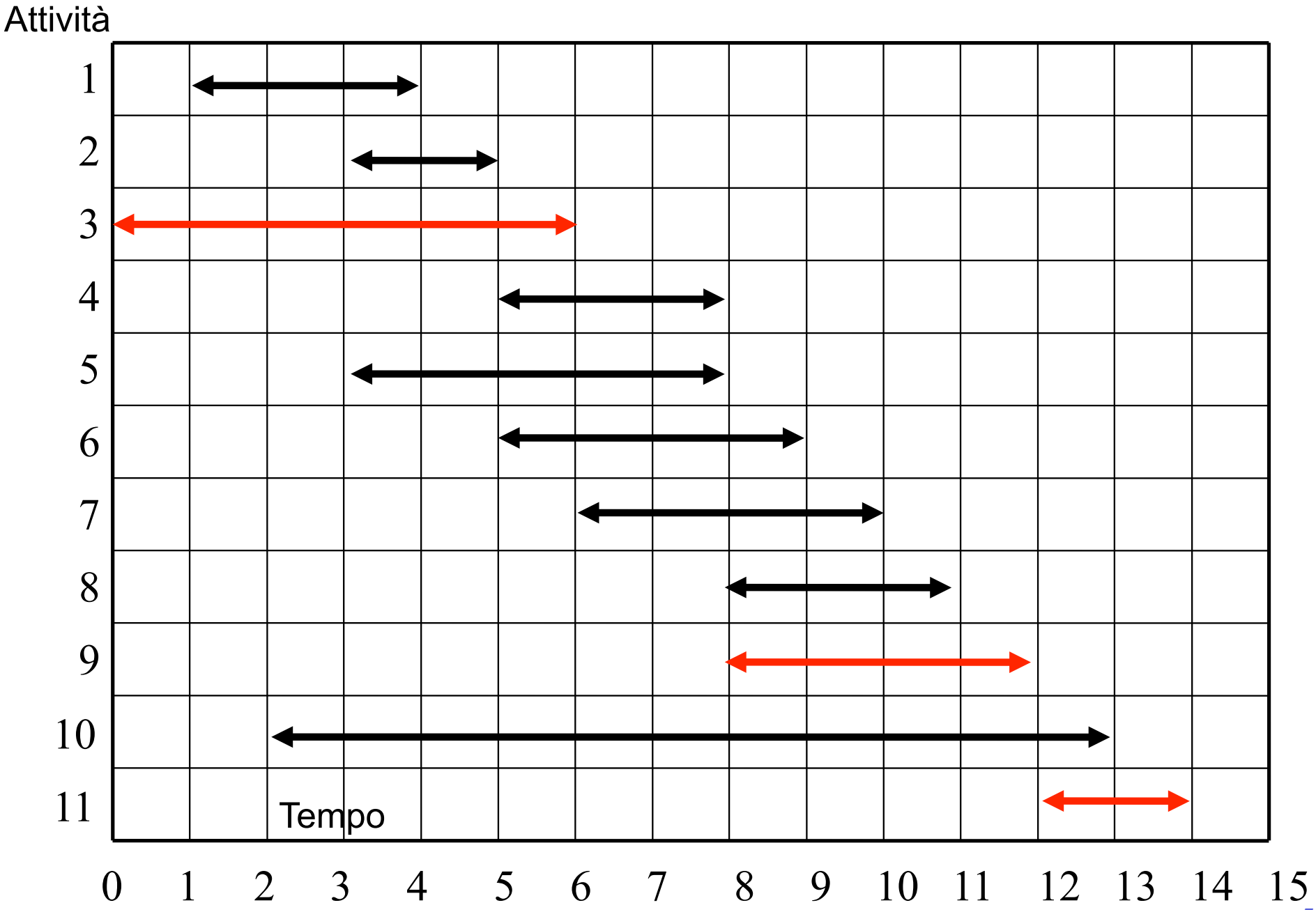
- a_i: tempo di inizio
- b_i: tempo di fine

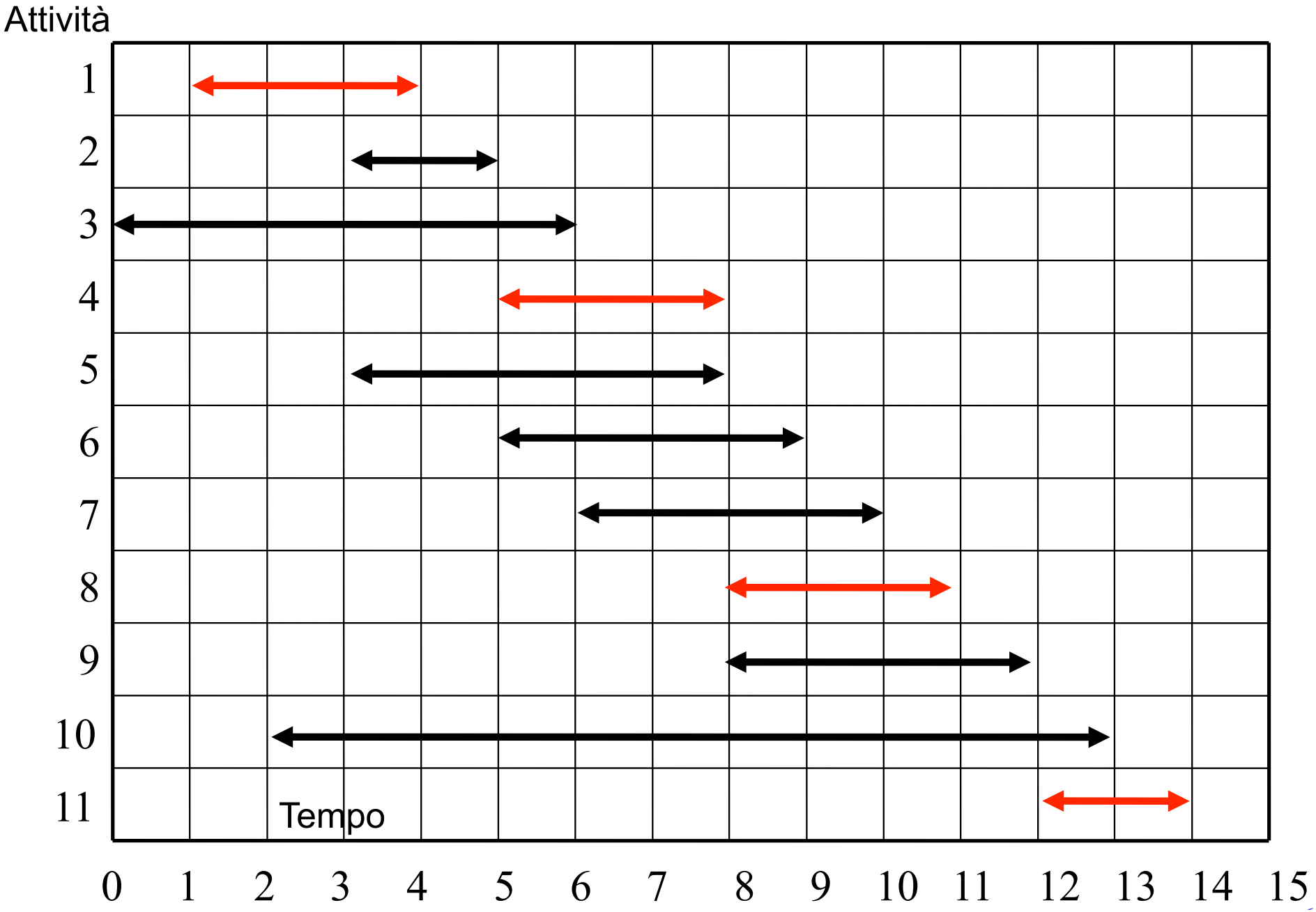
i	a_i	b_i
1	1	4
2	3	5
3	0	6
4	5	7
5	3	8
6	5	9
7	6	10
8	8	11
9	8	12
10	2	13
11	12	14

Definizione del problema

Un insieme indipendente massimale è un sottoinsieme di massima cardinalità formato da intervalli tutti disgiunti tra loro.

Confronta con Insieme indipendente di intervalli pesati


Attività
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
Tempo
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15


Attività
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
Tempo
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

Come affrontare il problema

Iniziamo con programmazione dinamica

- Individuiamo una sottostruttura ottima
- Scriviamo una definizione ricorsiva per la dimensione della soluzione ottima
- Scriviamo una versione iterativa bottom-up dell'algoritmo

Passiamo poi alla tecnica greedy

- Cerchiamo una possibile scelta ingorda
- Dimostriamo che la scelta ingorda porta alla soluzione ottima
- Scriviamo un algoritmo ricorsivo o iterativo che effettua sempre la scelta ingorda

Sottostruttura ottima

- Si assuma che gli intervalli siano ordinati per tempo di fine:

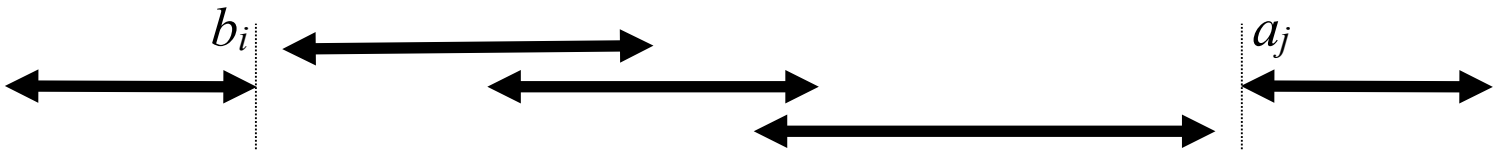
$$b_1 \leq b_2 \leq \ \ldots \leq b_n$$

- Definiamo il sottoproblema $S[i \ldots j]$ come l'insieme di intervalli che iniziano dopo la fine di i e finiscono prima dell'inizio di j:

$$S[i \ldots j] = \{k | b_i \leq a_k < b_k \leq a_j\}$$

- Aggiungiamo due intervalli fittizi:
  - Intervallo 0: $b_0 = -\infty$
  - Intervallo $n+1$: $a_{n+1} = +\infty$

- Il problema iniziale corrisponde al problema $S[0, n+1]$



Sottostruttura ottima

Teorema

Supponiamo che $A[i \,..\, j]$ sia una soluzione ottimale di $S[i \,..\, j]$ e sia k un intervallo che appartiene a $A[i \,..\, j]$; allora

- Il problema $S[i \,..\, j]$ viene suddiviso in due sottoproblemi
  - $S[i \,..\, k]$: gli intervalli di $S[i \,..\, j]$ che finiscono prima di k
  - $S[k \,..\, j]$: gli intervalli di $S[i \,..\, j]$ che iniziano dopo di k
- $A[i \,..\, j]$ contiene le soluzioni ottimali di $S[i \,..\, k]$ e $S[k \,..\, j]$
  - $A[i \,..\, j] \cap S[i \,..\, k]$ è la soluzione ottimale di $S[i \,..\, k]$
  - $A[i \,..\, j] \cap S[k \,..\, j]$ è la soluzione ottimale di $S[k \,..\, j]$

Dimostrazione

Utilizzando il metodo cut-and-paste

Definizione ricorsiva del costo della soluzione

Definizione ricorsiva della soluzione

$$A[i \ldots j] = A[i \ldots k] \cup \{k\} \cup A[k \ldots j]$$

Definizione ricorsiva del suo costo

- Come determinare k? Analizzando tutte le possibilità
- Sia $DP[i][j]$ la dimensione del più grande sottoinsieme $A[i \ldots j] \subseteq S[i \ldots j]$ di intervalli indipendenti

$$DP[i][j] = \begin{cases} 0 & S[i \ldots j] = \emptyset \\ \max_{k \in S[i \ldots j]} \{DP[i][k] + DP[k][j] + 1\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

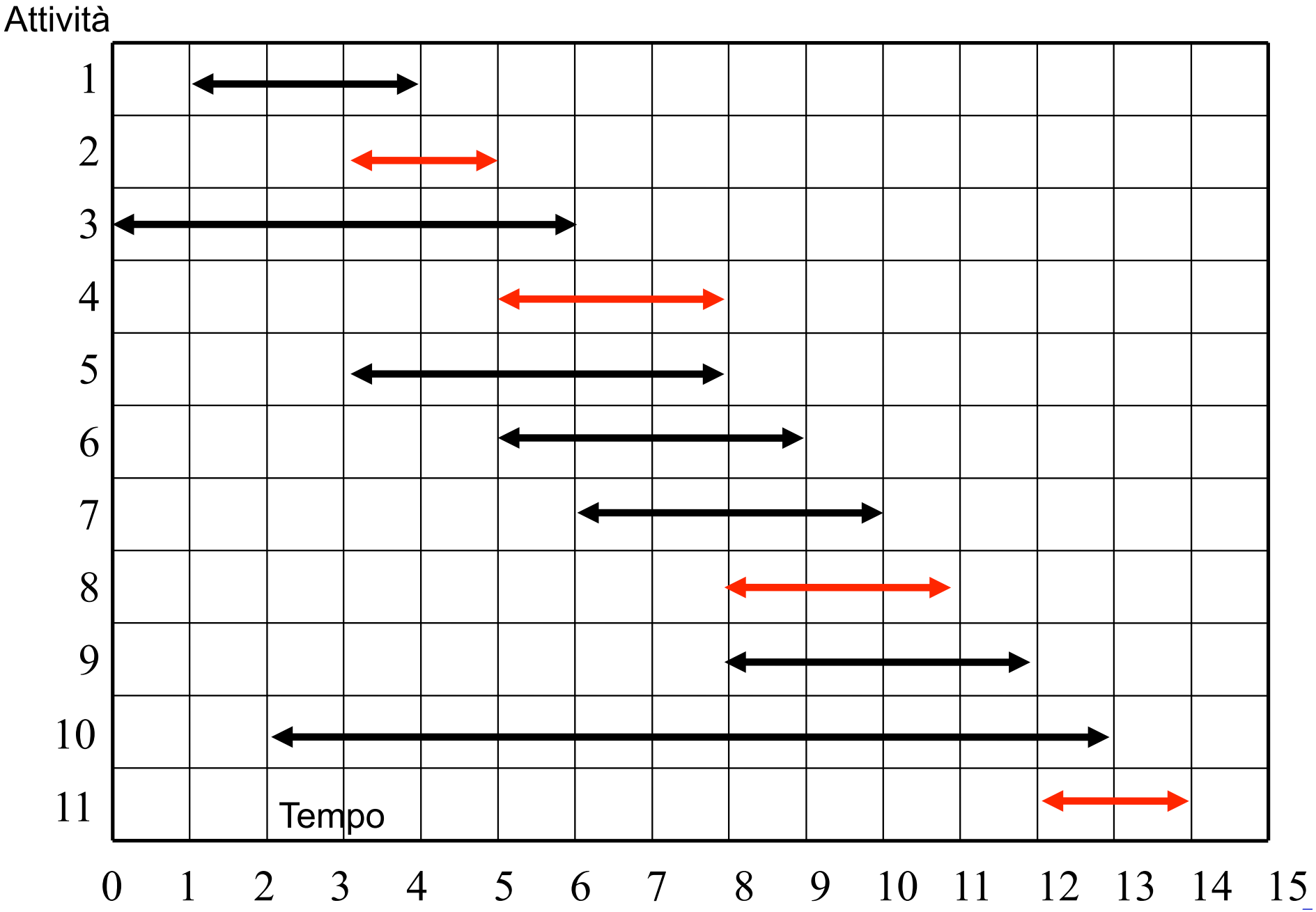
Verso una soluzione ingorda

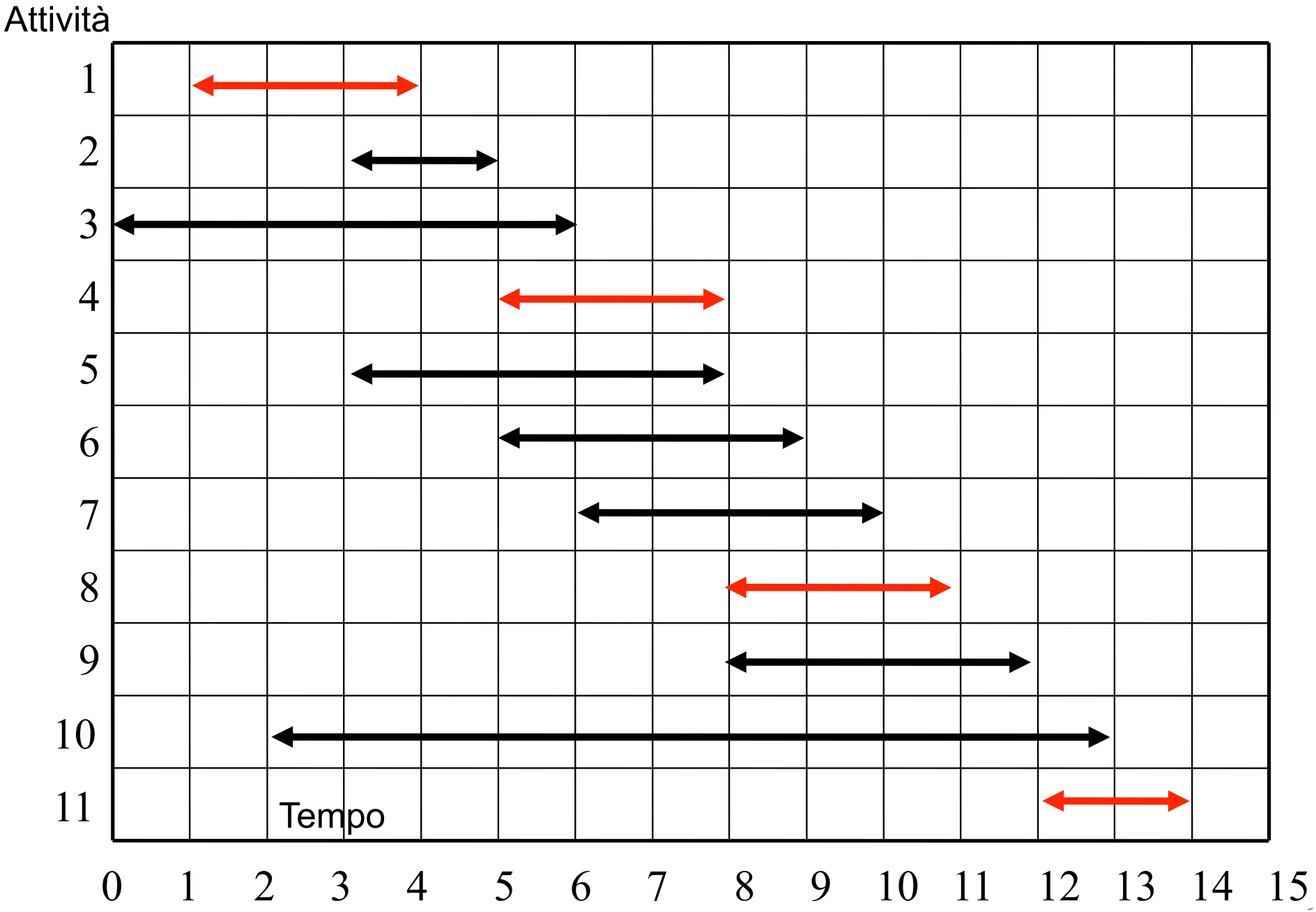
Programmazione dinamica

- La definizione precedente ci permette di scrivere un algoritmo basato su programmazione dinamica o su memoization
- Complessità $O(n^3)$: bisogna risolvere tutti i problemi con $i < j$, con costo $O(n)$ per sottoproblema nel caso peggiore

Possiamo fare di meglio?

- Abbiamo visto una soluzione $O(n \log n)$ nel caso di intervalli pesati
- È possibile utilizzare quella soluzione con pesi pari a 1
- Questa soluzione è peggiore, ma...
- Siamo sicuri che sia necessario analizzare tutti i possibili valori k?


Attività
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
Tempo
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15


Attività
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
Tempo
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

Scelta ingorda (Greedy Choice)

Teorema

Sia $S[i \,..\, j]$ un sottoproblema non vuoto, e m l'intervallo di $S[i \,..\, j]$ con il minor tempo di fine, allora:

1. il sottoproblema $S[i \,..\, m]$ è vuoto
2. m è compreso in qualche soluzione ottima di $S[i \,..\, j]$

Dimostrazione 1

Sappiamo che: $a_m < b_m$ (Definizione di intervallo)

Sappiamo che: $\forall k \in S[i \,..\, j] : b_m \leq b_k$ (m ha minor tempo di fine)

Ne consegue: $\forall k \in S[i \,..\, j] : a_m < b_k$ (Transitività)

Se nessun intervallo in $S[i \,..\, j]$ termina prima di a_m, allora $S[i \,..\, m] = \emptyset$

Scelta ingorda (Greedy Choice)

Teorema

Sia $S[i \,..\, j]$ un sottoproblema non vuoto, e m l'intervallo di $S[i \,..\, j]$ con il minor tempo di fine, allora:

1. il sottoproblema $S[i \,..\, m]$ è vuoto
2. m è compreso in qualche soluzione ottima di $S[i \,..\, j]$

Dimostrazione 2

- Sia $A'[i \,..\, j]$ una soluzione ottima di $S[i \,..\, j]$
- Sia m' l'intervallo con minor tempo di fine in $A'[i \,..\, j]$
- Sia $A[i \,..\, j] = (A'[i \,..\, j] - \{m'\}) \cup \{m\}$ una nuova soluzione ottenuta togliendo m' e aggiungendo m ad $A'[i \,..\, j]$
- $A[i \,..\, j]$ è una soluzione ottima che contiene m, in quanto ha la stessa dimensione di $A'[i \,..\, j]$ e gli intervalli sono indipendenti.

Conseguenze

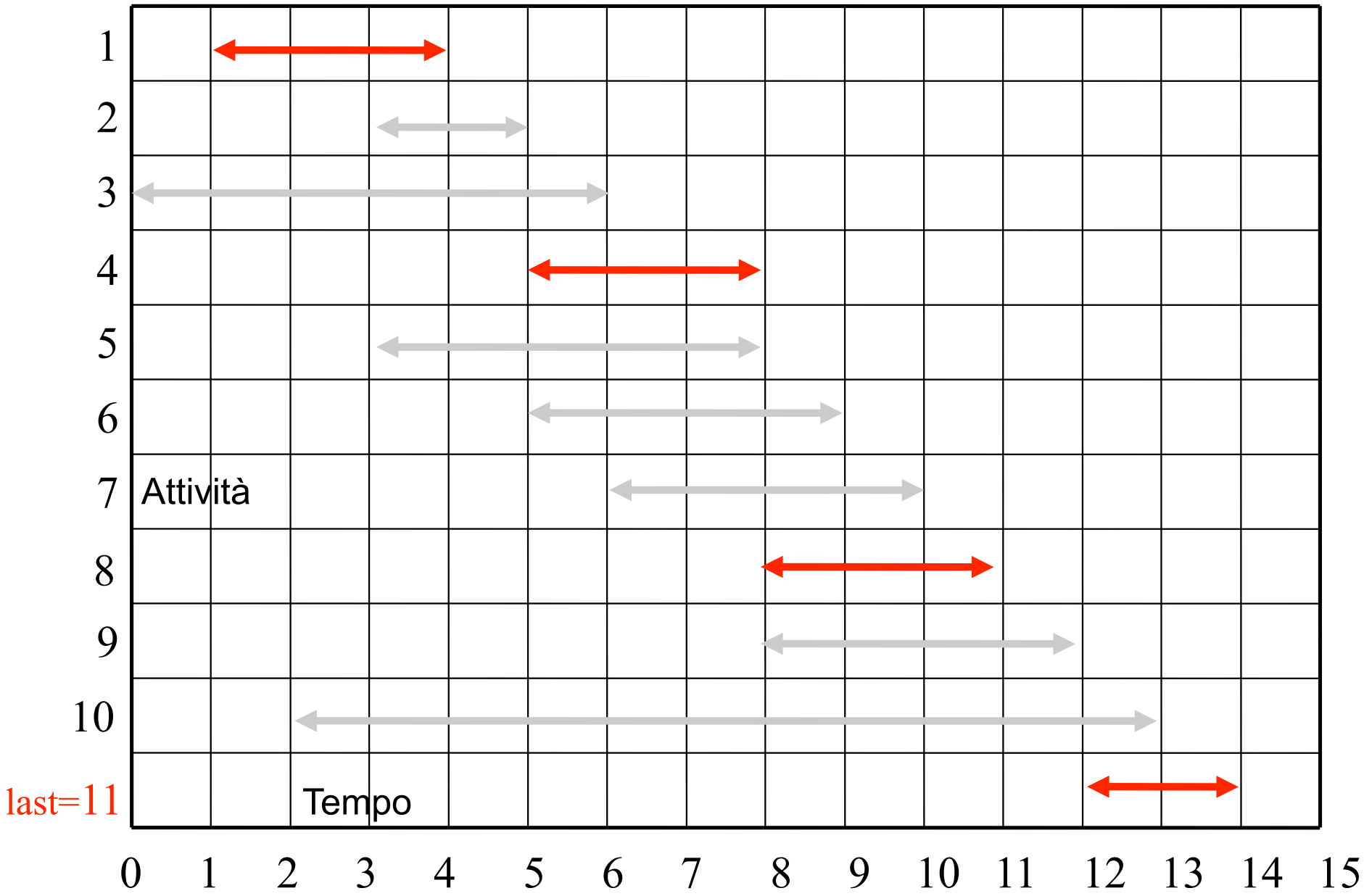
- Non è più necessario analizzare tutti i possibili valori di k:
  - Faccio una scelta "ingorda", ma sicura: seleziono l'attività m con il minor tempo di fine
- Non è più necessario analizzare due sottoproblemi:
  - Elimino tutte le attività che non sono compatibili con la scelta ingorda
  - Mi resta solo un sottoproblema da risolvere: $S[m \dots j]$

Algoritmo

SET independentSet(**int**[ ] a, **int**[ ] b)

{ ordina a e b in modo che $b[1] \leq b[2] \leq \cdots \leq b[n]$ }
SET S = Set()
S.insert(1)
int $last = 1$ % Ultimo intervallo inserito
for $i = 2$ **to** n **do**
  if $a[i] \geq b[last]$ **then** % Controllo indipendenza
    S.insert(i)
    $last = i$
return S

Complessità: $O(n \log n)$ se input non è ordinato
$O(n)$ se l'input è già ordinato.


1
2
3
4
5
6
7
Attività
8
9
10
last=11
Tempo
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

Approccio a partire da Programmazione Dinamica

- Abbiamo cercato di risolvere il problema della selezione delle attività tramite programmazione dinamica:
  - Abbiamo individuato una sottostruttura ottima
  - Abbiamo scritto una definizione ricorsiva per la dimensione della soluzione ottima
- Abbiamo dimostrato la proprietà della scelta greedy:
  - Per ogni sottoproblema, esiste almeno una soluzione ottima che contiene la scelta greedy
  - Abbiamo scritto un algoritmo iterativo che effettua sempre la scelta ingorda

Problema del resto (Money change)

Input

- Un insieme di "tagli" di monete, memorizzati in un vettore di interi positivi $t[1 \ldots n]$.
- Un intero R rappresentante il resto che dobbiamo restituire.

Definizione del problema

Trovare il più piccolo numero intero di pezzi necessari per dare un resto di R centesimi utilizzando i tagli disponibili, assumendo di avere un numero illimitato di monete per ogni taglio.
Formalmente, trovare un vettore x di interi non negativi tale che:

$$R = \sum_{i=1}^{n} x[i] \cdot t[i] \qquad \text{e} \qquad m = \sum_{i=1}^{n} x[i] \text{ ha valore minimo}$$

Soluzione basata su programmazione dinamica

Sottostruttura ottima

- Sia $S(i)$ il problema di dare un resto pari ad i
- Sia $A(i)$ una soluzione ottima del problema $S(i)$, rappresentata da un multi-insieme; sia $j \in A(i)$
- Allora, $S(i - t[j])$ è un sottoproblema di $S(i)$, la cui soluzione ottima è data da $A(i) - \{j\}$.

Definizione ricorsiva

- Tabella di programmazione dinamica: $DP[0 \,..\, R]$
- $DP[i]$: minimo n. di monete per risolvere il problema $S(i)$

$$DP[i] = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ \min_{1 \le j \le n \wedge t[j] \le i} \{DP[i - t[j]]\} + 1 & i > 0 \end{cases}$$

Algoritmo

int[ ] moneyChange(**int**[ ] t, **int** n, **int** R)

```
int[] DP = new int[0...R]                    % Value of the solution
int[] coin = new int[0...R]   % Coin to be used for a specific value
DP[0] = 0
for i = 1 to R do
    DP[i] = +∞
    for j = 1 to n do
        if i ≥ t[j] and DP[i − t[j]] + 1 < DP[i] then
            DP[i] = DP[i − t[j]] + 1
            coin[i] = j
[...]
```

Algoritmo

int[ ] moneyChange(**int**[ ] t, **int** n, **int** R)

```
[...]
% Solution reconstruction
int[] x = new int[1...n] = {0} % Output vector, initialized to zero
while R > 0 do
    x[coin[R]] = x[coin[R]] + 1
    R = R - t[coin[R]]
return x
```

Complessità?

$O(nR)$

Scelta greedy

Domanda

È possibile pensare ad una soluzione greedy?

Risposta

Selezionare la moneta j più grande tale per cui $t[j] \leq R$, e poi risolvere il problema $S(R - t[j])$.

Esempi

- Tagli: $200, 100, 50, 20, 10, 5, 2, 1$
- Tagli: $50, 10, 5, 1$
- Tagli: $10, 8, 1$
- Tagli: $c^k, c^{k-1}, \ldots, c, 1 \quad (c \in \mathbb{Z}^+)$

Algoritmo

int[ ] moneyChange(**int**[ ] t, **int** n, **int** R)

int[ ] x = **new int**[$1 \ldots n$]
{ Ordina le monete in modo decrescente }
for $i = 1$ **to** n **do**
  $x[i] = \lfloor R/t[i] \rfloor$
  $R = R - x[i] \cdot t[i]$
return x

Complessità: $O(n \log n)$ se input non è ordinato
$O(n)$ se l'input è già ordinato.

Dimostrazione scelta greedy $t = [50, 10, 5, 1]$

- Sia x una qualunque soluzione ottima; quindi

$$\sum_{i=1}^{4} x[i] \cdot t[i] = R \qquad m = \sum_{i=1}^{4} x[i] \quad \text{è minimo}$$

- Sappiamo che $t[k] \cdot x[k] < t[k-1]$, altrimenti basterebbe sostituire un certo numero di monete di taglia $t[k]$ con quelle del taglio $t[k-1]$.

$$\begin{array}{llllll} t[2] \cdot x[2] & = 10 \cdot x[2] & < t[1] & = 50 & \Rightarrow x[2] < 5 \\ t[3] \cdot x[3] & = 5 \cdot x[3] & < t[2] & = 10 & \Rightarrow x[3] < 2 \\ t[4] \cdot x[4] & = 1 \cdot x[4] & < t[3] & = 5 & \Rightarrow x[4] < 5 \end{array}$$

Dimostrazione scelta greedy $t = [50, 10, 5, 1]$

- Sia m_k la somma delle monete di taglio inferiore a $t[k]$:

$$m_k = \sum_{i=k+1}^{4} x[i] \cdot t[i]$$

- Se dimostriamo che $\forall k : m_k < t[k]$, allora la soluzione (ottima) è proprio quella calcolata dall'algoritmo

$$\begin{array}{llllll}
m_4 & = 0 & & < 1 & & = t[4] \\
m_3 & = x[4] \cdot 1 + m_4 & \leq 4 \cdot 1 + m_4 & < 4 + 1 & = 5 & = t[3] \\
m_2 & = x[3] \cdot 5 + m_3 & \leq 1 \cdot 5 + m_3 & < 5 + 5 & = 10 & = t[2] \\
m_1 & = x[2] \cdot 10 + m_2 & \leq 4 \cdot 10 + m_2 & < 40 + 10 & = 50 & = t[1]
\end{array}$$

Approccio greedy, senza programmazione dinamica

- Evidenziare i "passi di decisione"
  - Trasformare il problema di ottimizzazione in un problema di "scelte" successive
- Evidenziare una possibile scelta ingorda
  - Dimostrare che tale scelta rispetto il "principio della scelta ingorda"
- Evidenziare la sottostruttura ottima
  - Dimostrare che la soluzione ottima del problema "residuo" dopo la scelta ingorda può essere unito a tale scelta
- Scrittura codice: top-down, anche in maniera iterativa
  - Nota: può essere necessario pre-processare l'input

Scheduling

Input

Supponiamo di avere un processore e n job da eseguire su di esso, ognuno caratterizzato da un tempo di esecuzione $t[i]$ noto a priori.

Problema

Trovare una sequenza di esecuzione (permutazione) che minimizzi il tempo di completamento medio.

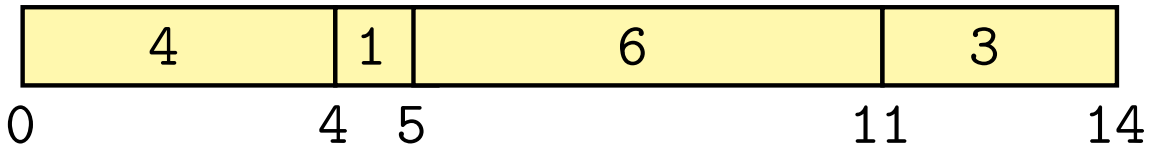
Tempo di completamento

Dato un vettore $A[1 \ldots n]$ contenente una permutazione di $\{1, \ldots n\}$, il tempo di completamento dell'h-esimo job nella permutazione è:

$$T_A(h) = \sum_{i=1}^{h} t[A[i]]$$

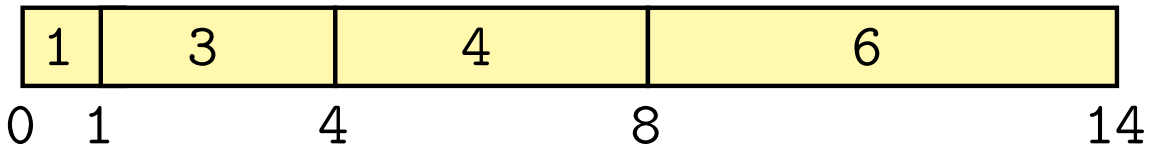
Esempio

Esempio



Tempo di completamento medio:
$(4 + 5 + 11 + 14)/4 = 34/4 = 8.5$

Shortest job first



Tempo di completamento medio:
$(1 + 4 + 8 + 14)/4 = 27/4 = 6.75$

Dimostrazione di correttezza

Teorema - Scelta greedy

Esiste una soluzione ottima A in cui il job con minor tempo di fine m si trova in prima posizione ($A[1] = m$).

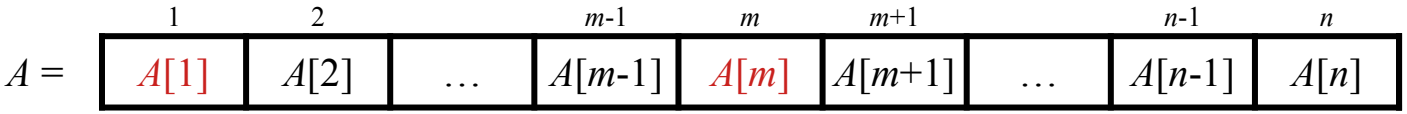
Teorema – Sottostruttura ottima

Sia A una soluzione ottima di un problema con n job, in cui il job con minor tempo di fine m si trova in prima posizione. La permutazione dei seguenti $n - 1$ job in A è una soluzione ottima al sottoproblema in cui il job m non viene considerato.

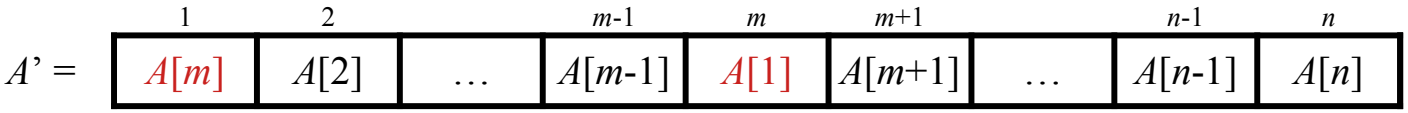
Dimostrazione – Scelta greedy

Trasformazione soluzione ottima

- Si consideri una permutazione ottima A:



- Sia m la posizione in A in cui si trova il job con minor tempo di fine
- Si consideri una permutazione A' in cui i job in posizione 1, m vengono scambiati:

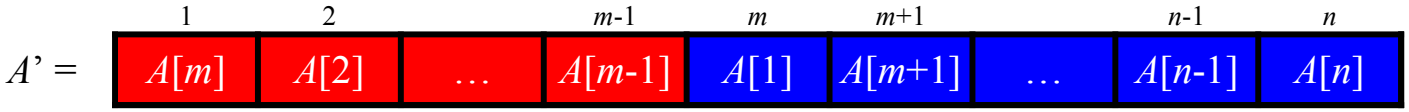


- Il tempo di completamento medio di A' è minore o uguale al tempo di completamento medio di A

Dimostrazione – Scelta greedy

La soluzione trasformata è anch'essa ottima

- Il tempo di completamento medio di A' è minore o uguale al tempo di completamento medio di A



  - Job in posizione $1, ..., m-1$ in A' hanno tempo di completamento $\leq$ dei job in posizione $1, ..., m-1$ in A
  - Job in posizione $m, ..., n$ in A' hanno tempo di completamento $=$ dei job in posizione $m, ..., n$ in A

- Poichè A è ottima, A' non può avere tempo di completamento medio minore e quindi anche A' è ottima.

Problema dello zaino

Input

- Un intero positivo C - la capacità dello zaino
- n oggetti, tali che l'oggetto i-esimo è caratterizzato da
  - un profitto $p_i \in \mathbb{Z}^+$
  - un peso $w_i \in \mathbb{Z}^+$

Zaino 0/1

Trovare un sottoinsieme S di $\{1, ..., n\}$ di oggetti tale che il loro peso totale non superi la capacità massima e il loro profitto totale sia massimo.

Zaino reale (o Zaino frazionario)

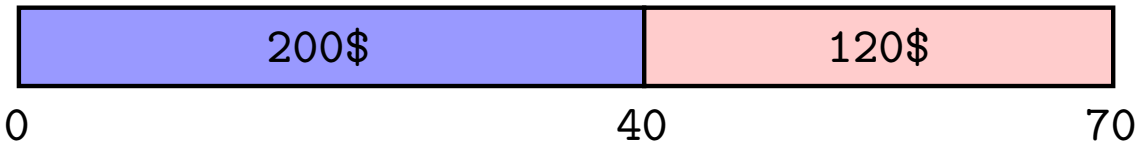
È possibile prendere frazioni di oggetti.

Esempio

Consideriamo i tre oggetti a lato ed una capacità di 70

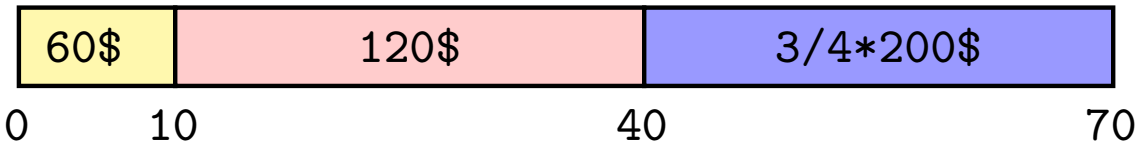
i	p_i	w_i
1	60$	10
2	200$	40
3	120$	30

Approccio 1: Ordinati per profitto decrescente



200$ +120$ = 320$

Approccio 2: Ordinati per peso crescente



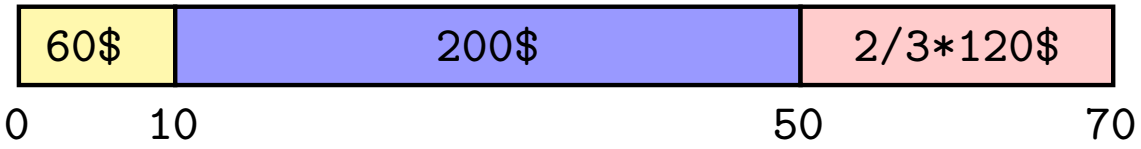
60$ + 120$ + 150$ = 330$

Esempio

Consideriamo i tre oggetti a lato ed una capacità di 70

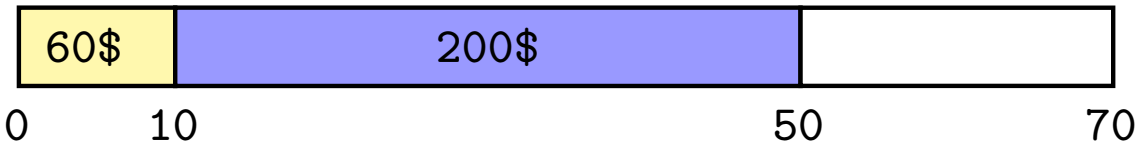
i	p_i	w_i	p_i/w_i
1	60$	10	6$
2	200$	40	5$
3	120$	30	4$

Approccio 3: Ordinati per profitto specifico p_i/w_i decrescente



60$ +200$ + 80$ = 340$

Approccio 3 non funziona per Zaino 0/1



60$ +200$ = 260$

Algoritmo

float[ ] zaino(**float**[ ] p, **float**[ ] w, **float** C, **int** n)

float[ ] x = **new float**[$1 \ldots n$]
{ ordina p e w in modo che $p[1]/w[1] \geq p[2]/w[2] \geq \cdots \geq p[n]/w[n]$}
for $i = 1$ **to** n **do**
    $x[i] = \min(C/w[i], 1)$
    $C = C - x[i] \cdot w[i]$
return x

Complessità: $O(n \log n)$ se input non è ordinato
$O(n)$ se l'input è già ordinato.

$x[i] \in [0, 1]$ rappresenta la porzione dell'oggetto i-esimo che deve essere prelevata.

Correttezza

Informalmente

- Assumiamo che gli oggetti siano ordinati per profitto specifico decrescente
- Sia x una soluzione ottima
- Supponiamo che $x[1] < \mathsf{min}(C/w[i], 1) < 1$
- Allora possiamo costruire una nuova soluzione in cui $x'[1] = \mathsf{min}(C/w[i], 1)$ e la proporzione di uno o più oggetti è ridotta di conseguenza
- Otteniamo così una soluzione x' di profitto uguale o superiore, visto che il profitto specifico dell'oggetto 1 è massimo

Problema della compressione

Rappresentare i dati in modo efficiente

- Impiegare il numero minore di bit per la rappresentazione
- Obiettivo: risparmio spazio su disco e tempo di trasferimento

Una possibile tecnica di compressione: codifica di caratteri

- Tramite funzione di codifica $f : f(c) = x$
  - c è un possibile carattere preso da un alfabeto Σ
  - x è una rappresentazione binaria
  - "c è rappresentato da x"

Possibili codifiche

Esempio

- Supponiamo di avere un file di n caratteri
- Composto da caratteri nell'alfabeto `abcdef`
- Di cui conosciamo la frequenza relativa

Caratteri	`a`	`b`	`c`	`d`	`e`	`f`	**Dim.**
Frequenza	45%	13%	12%	16%	9%	5%	
ASCII	01100001	01100010	01100011	01100100	01100101	01100110	$8n$
Codifica 1	000	001	010	011	100	101	$3n$

Possiamo fare di meglio?

Possibili codifiche

Esempio

- Supponiamo di avere un file di n caratteri
- Composto da caratteri nell'alfabeto `abcdef`
- Di cui conosciamo la frequenza relativa

Caratteri	`a`	`b`	`c`	`d`	`e`	`f`	**Dim.**
Frequenza	45%	13%	12%	16%	9%	5%	
ASCII	01100001	01100010	01100011	01100100	01100101	01100110	$8n$
Codifica 1	000	001	010	011	100	101	$3n$
Codifica 2	0	101	100	111	1101	1100	$2.24n$

Costo totale: $(0.45 \cdot 1 + 0.13 \cdot 3 + 0.12 \cdot 3 + 0.16 \cdot 3 + 0.09 \cdot 4 + 0.05 \cdot 4) \cdot n = 2.24n$

Codifica a prefissi

Codice a prefisso

In un codice a prefisso (meglio sarebbe "senza prefissi"), nessun codice è prefisso di un altro codice (condizione necessaria per la decodifica).

Esempio 1

- Codice: `"a"` $\to$ `0`, `"b"` $\to$ `10`, `"c"` $\to$ `11`
- `"babaca"`: `10` $\cdot$ `0` $\cdot$ `10` $\cdot$ `0` $\cdot$ `11` $\cdot$ `0`

Esempio 2

- Codice: `"a"` $\to$ `0`, `"b"` $\to$ `1`, `"c"` $\to$ `11`
- `111111`?

Rappresentazione ad albero per la codifica

Alcune domande

- È possibile che il testo codificato sia più lungo della rappresentazione con 3 bit?
- Esistono testi "difficili" per questa codifica?
- Come organizzare un algoritmo per la decodifica?

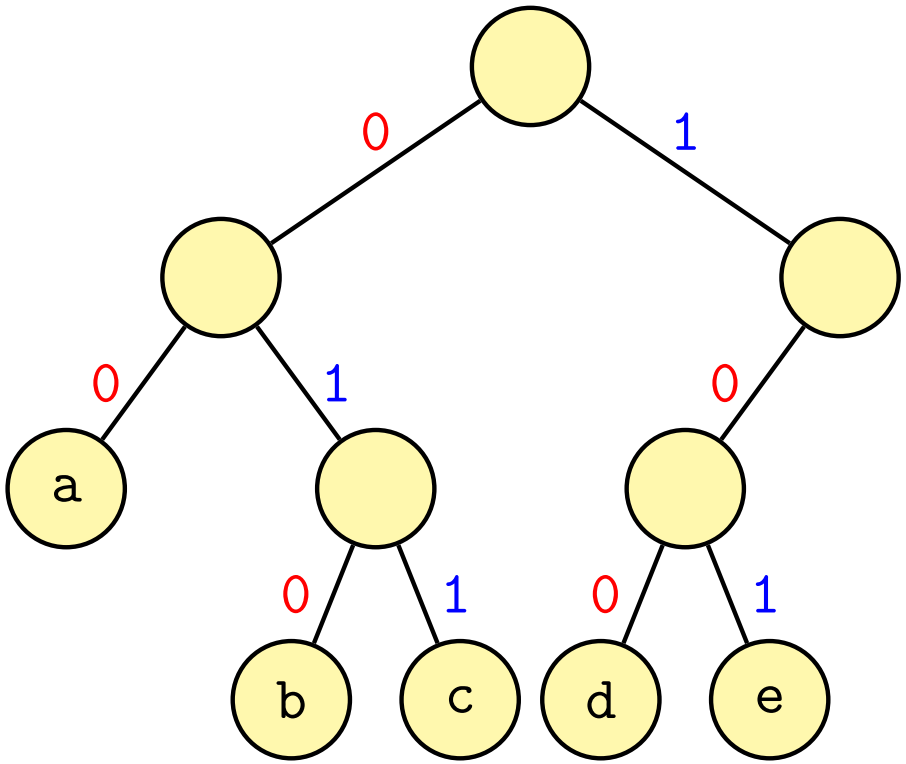
Cenni storici

- David Huffman, 1952
- Algoritmo ottimo per costruire codici prefissi
- Oggi utilizzato come complemento di altri metodi di compressione (e.g. in `pkzip`, `zip`, `winrar`)

Rappresentazione ad albero per la decodifica

Alberi binari di decodifica

- Figlio sinistro/destro: 0 / 1
- Caratteri dell'alfabeto sulle foglie



a	b	c	d	e
00	010	011	100	101

Algoritmo di decodifica

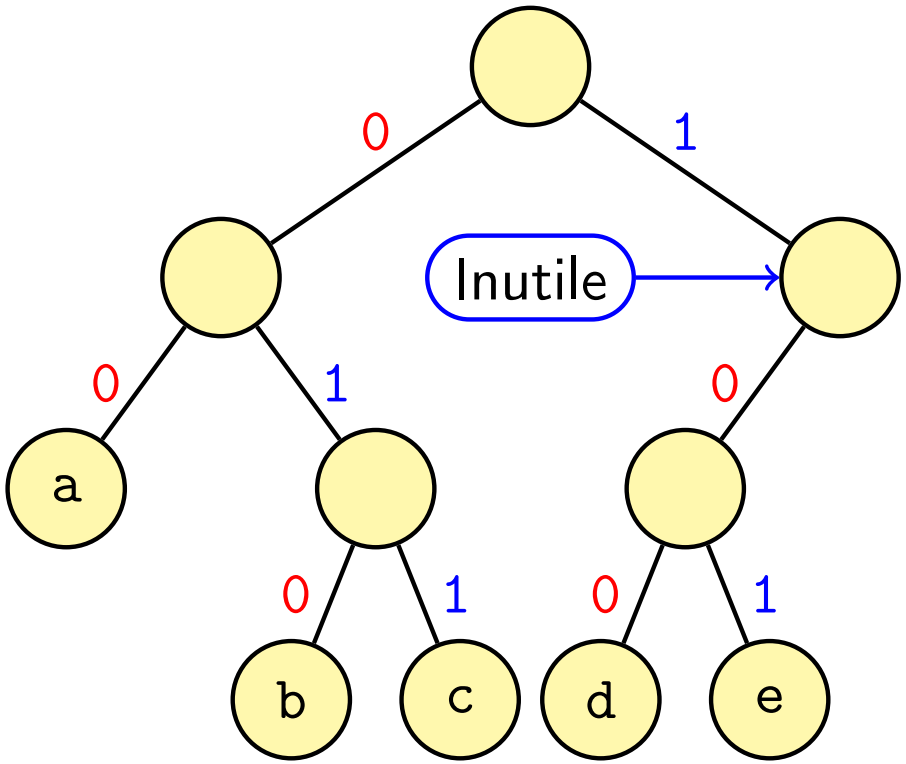
```
parti dalla radice
while file non è finito do
    leggi un bit
    if bit è zero then
        vai a sinistra
    else
        vai a destra
    if nodo foglia then
        stampa il carattere
        torna alla radice
```

Rappresentazione ad albero per la decodifica

Alberi binari di decodifica

- Figlio sinistro/destro: 0 / 1
- Caratteri dell'alfabeto sulle foglie

a	b	c	d	e
00	010	011	100	101



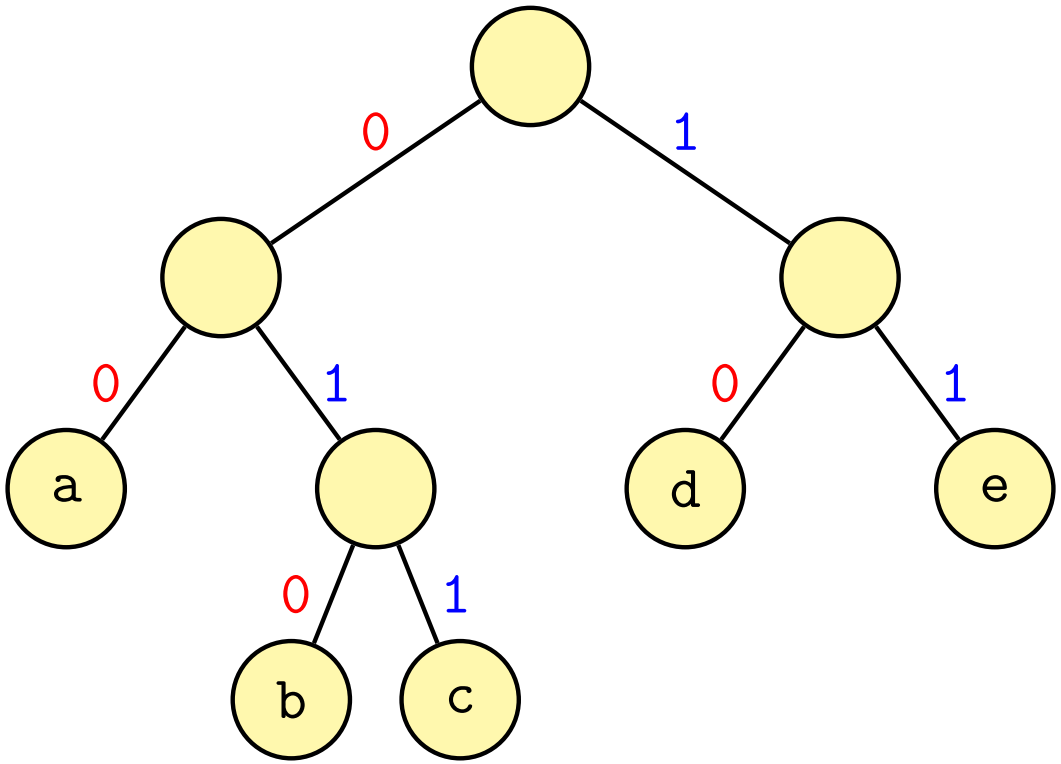
Algoritmo di decodifica

parti dalla radice
while file non è finito **do**
    leggi un bit
    if bit è zero **then**
        vai a sinistra
    else
        vai a destra
    if nodo foglia **then**
        stampa il carattere
        torna alla radice

Rappresentazione ad albero per la decodifica

Alberi binari di decodifica

- Figlio sinistro/destro: 0 / 1
- Caratteri dell'alfabeto sulle foglie



a	b	c	d	e
00	010	011	10	11

Algoritmo di decodifica

```
parti dalla radice
while file non è finito do
    leggi un bit
    if bit è zero then
        vai a sinistra
    else
        vai a destra
    if nodo foglia then
        stampa il carattere
        torna alla radice
```

Definizione formale del problema

Input

- un file F composto da caratteri nell'alfabeto Σ

Quanti bit sono richiesti per codificare il file?

- Sia T un albero che rappresenta la codifica
- Per ogni $c \in \Sigma$, sia $d_T(c)$ la profondità della foglia che rappresenta c
- Il codice per c richiederà allora $d_T(c)$ bit
- Se $f[c]$ è il numero di occorrenze di c in F, allora la dimensione della codifica è

$$C(F,T) = \sum_{c \in \Sigma} f[c] \cdot d_T(c)$$

Algoritmo di Huffman

Principio del codice di Huffman

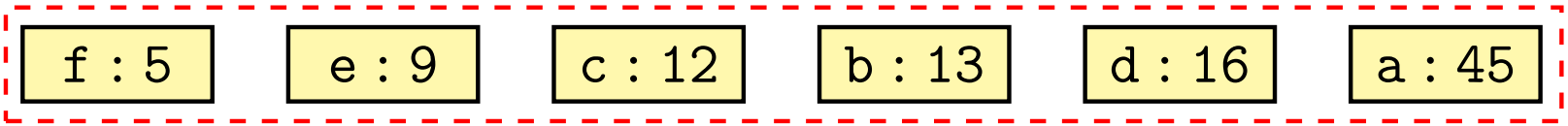
- Minimizzare la lunghezza dei caratteri che compaiono più frequentemente
- Assegnare ai caratteri con la frequenza minore i codici corrispondenti ai percorsi più lunghi all'interno dell'albero

Ogni codice è progettato per un file specifico

- Si ottiene la frequenza di tutti i caratteri
- Si costruisce il codice
- Si rappresenta il file tramite il codice
- Si aggiunge al file una rappresentazione del codice, per la decodifica

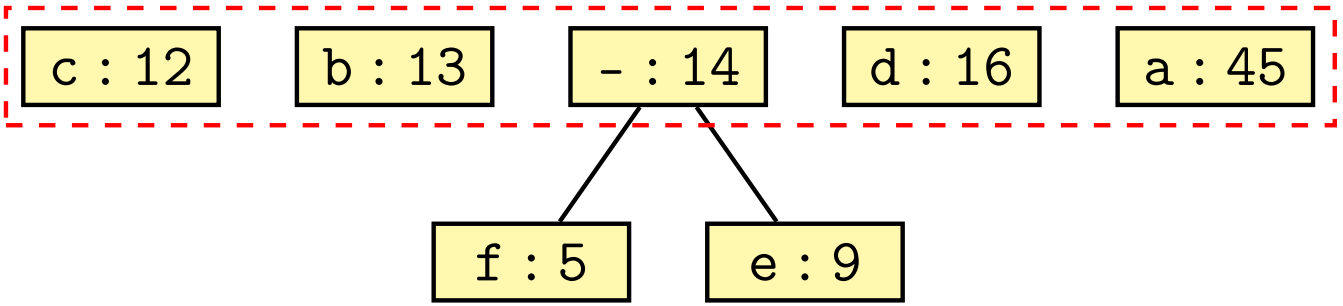
Funzionamento algoritmo

- Costruire un nodo foglia per ogni carattere, etichettato con la propria frequenza



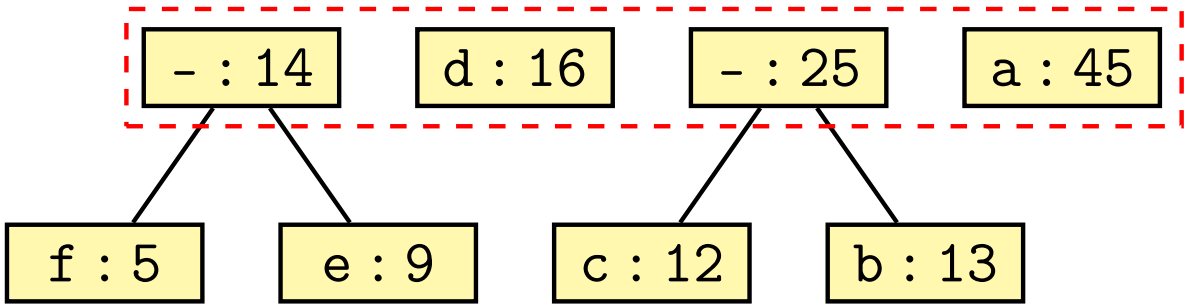
Funzionamento algoritmo

- Rimuovere i due nodi con frequenze minori f_x, f_y
- Creare un nodo padre con etichetta "-" e frequenza $f_x + f_y$
- Collegare i due nodi rimossi con il nuovo nodo
- Aggiungere il nodo così creato all'insieme



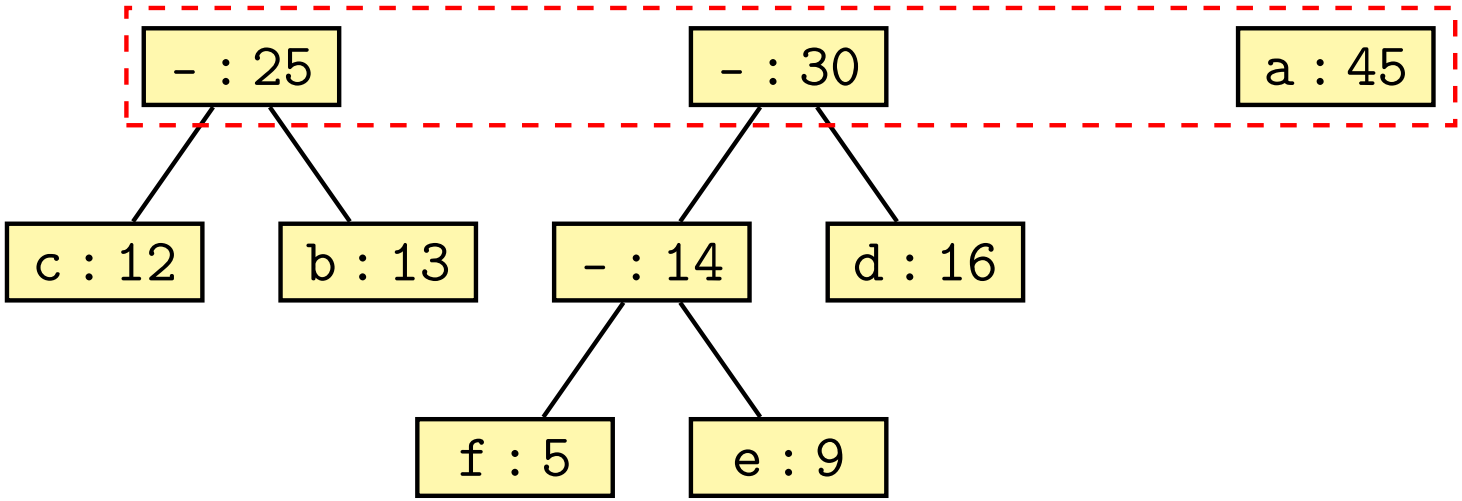
Funzionamento algoritmo

- Rimuovere i due nodi con frequenze minori f_x, f_y
- Creare un nodo padre con etichetta "-" e frequenza $f_x + f_y$
- Collegare i due nodi rimossi con il nuovo nodo
- Aggiungere il nodo così creato all'insieme



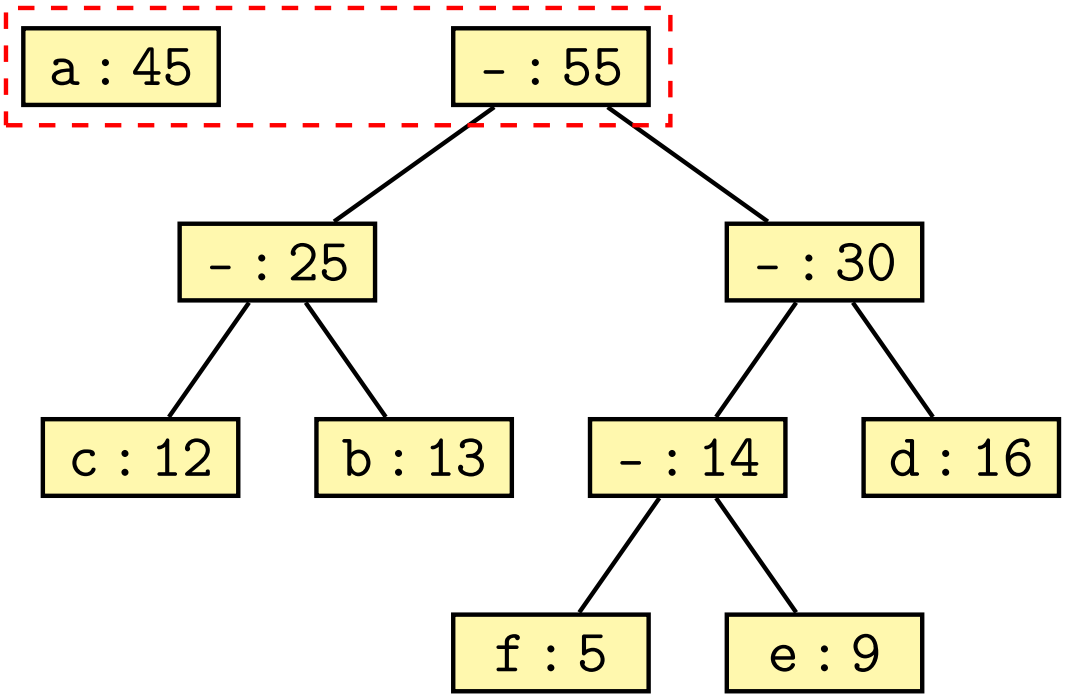
Funzionamento algoritmo

- Rimuovere i due nodi con frequenze minori f_x, f_y
- Creare un nodo padre con etichetta "-" e frequenza $f_x + f_y$
- Collegare i due nodi rimossi con il nuovo nodo
- Aggiungere il nodo così creato all'insieme



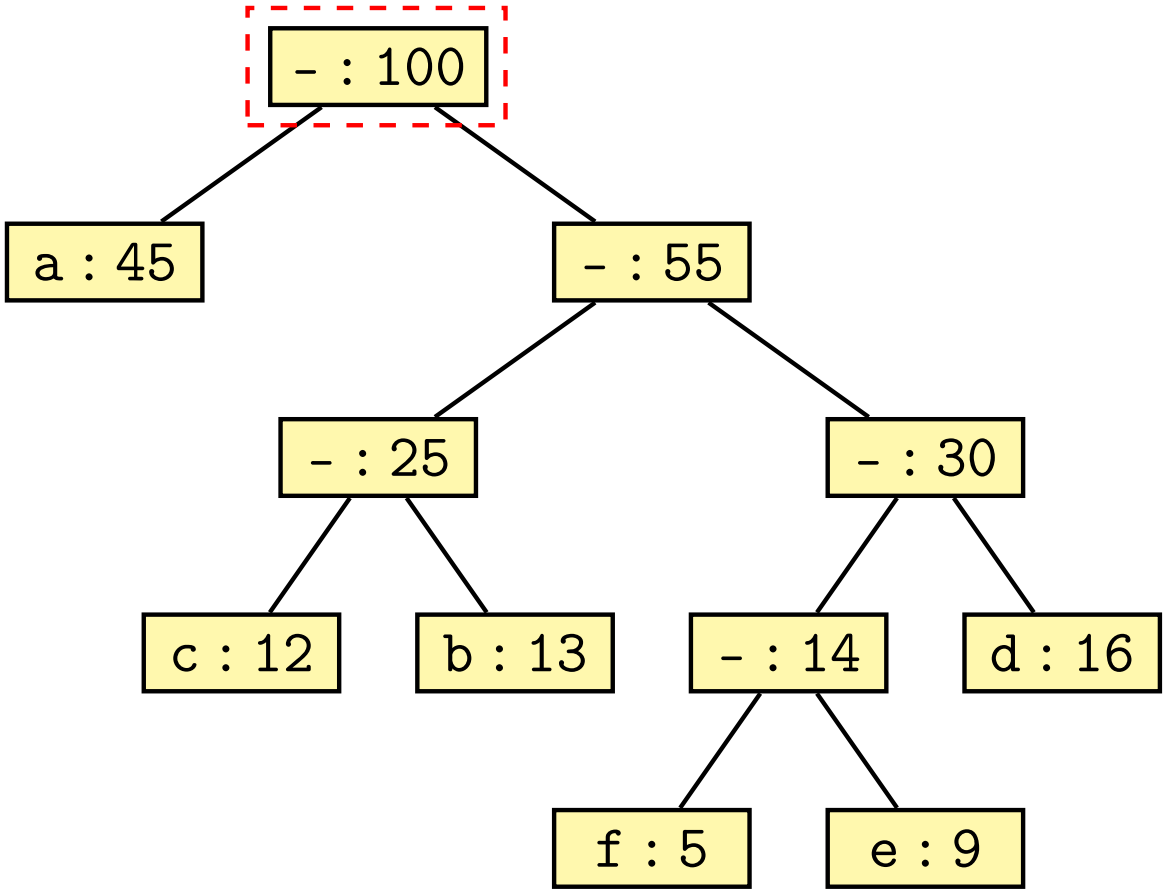
Funzionamento algoritmo

- Rimuovere i due nodi con frequenze minori f_x, f_y
- Creare un nodo padre con etichetta "-" e frequenza $f_x + f_y$
- Collegare i due nodi rimossi con il nuovo nodo
- Aggiungere il nodo così creato all'insieme



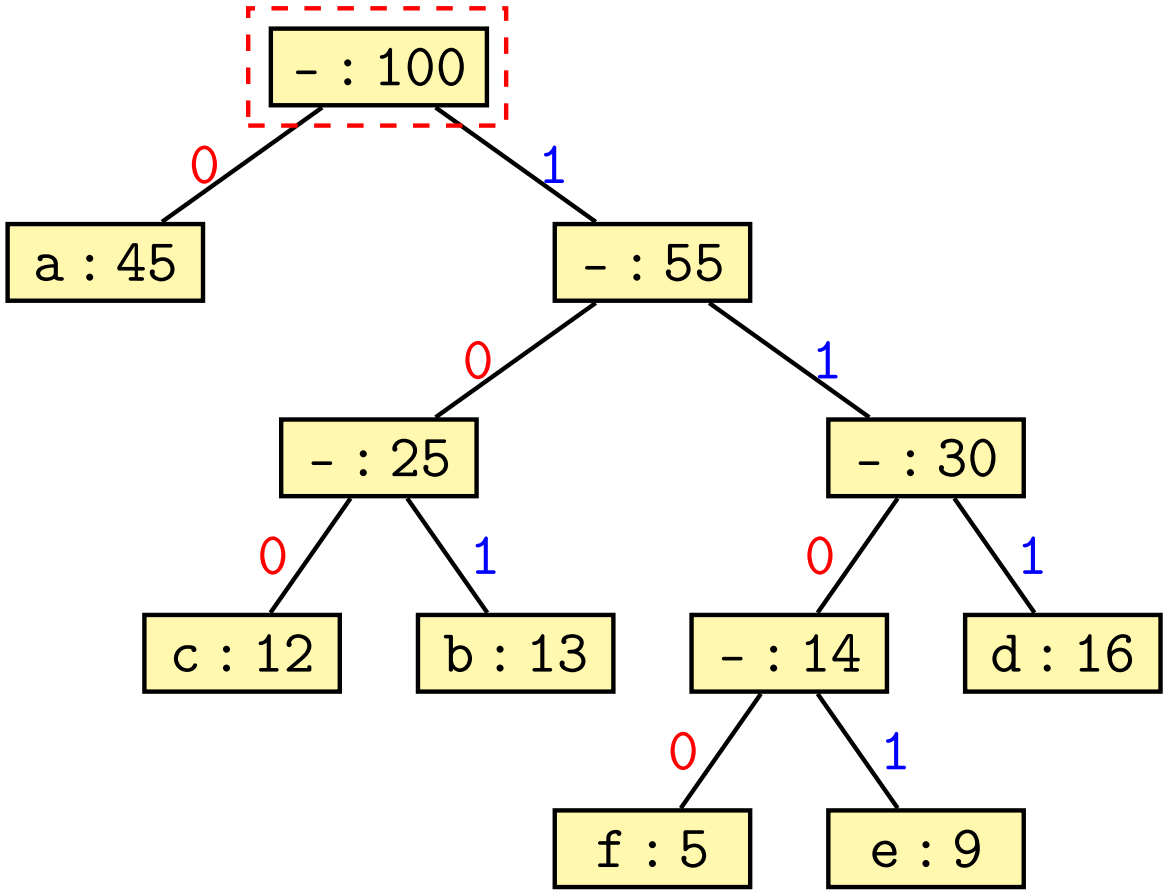
Funzionamento algoritmo

- Si termina quando resta un solo nodo



Funzionamento algoritmo

- Al termine, si etichettano gli archi dell'albero con bit `0`,`1`



a	0
b	101
c	100
d	111
e	1101
f	1100

Algoritmo

```
TREE huffman(int[] c, int[] f, int n)
PRIORITYQUEUE Q = MinPriorityQueue()
for i = 1 to n do
    Q.insert(Tree(c[i], f[i]), f[i])
for i = 1 to n − 1 do
    z1 = Q.deleteMin()
    z2 = Q.deleteMin()
    z = Tree(nil, z1.f + z2.f)
    z.left = z1
    z.right = z2
    Q.insert(z, z.f)
return Q.deleteMin()
```

Input

- n : numero caratteri
- $c[\,]$: caratteri alfabeto
- $f[\,]$: frequenze

TREE

c	%	Carattere
f	%	Frequenza
$left$	%	Figlio sinistro
$right$	%	Figlio destro

Complessità: $O(n \log n)$

Correttezza

Teorema

L'output dell'algoritmo Huffman per un dato file è un codice a prefisso ottimo

Proprietà della scelta greedy

Scegliere i due elementi con la frequenza più bassa conduce sempre ad una soluzione ottimale

Sottostruttura ottima

Dato un problema sull'alfabeto Σ, è possibile costruire un sottoproblema con un alfabeto più piccolo

Scelta greedy

Ipotesi

- Siano Σ un alfabeto, f un vettore di frequenze
- Siano x, y i due caratteri con frequenza più bassa

Tesi

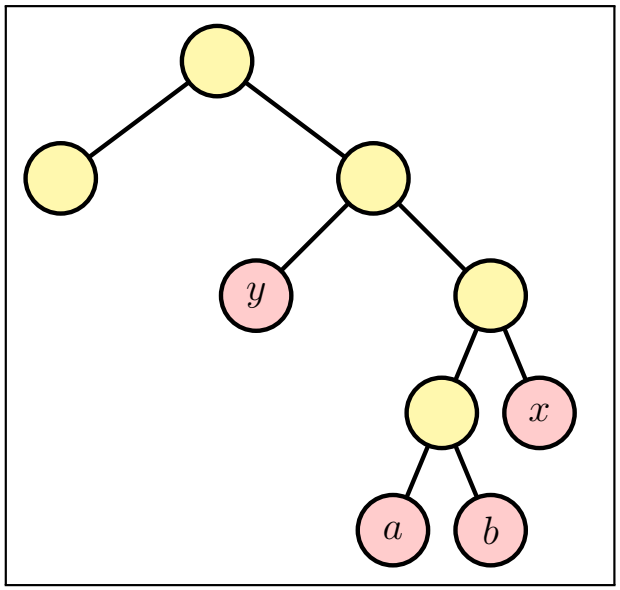
- Esiste un codice prefisso ottimo per Σ in cui x, y hanno la stessa profondità massima e i loro codici differiscono solo per l'ultimo bit (sono foglie sorelle)

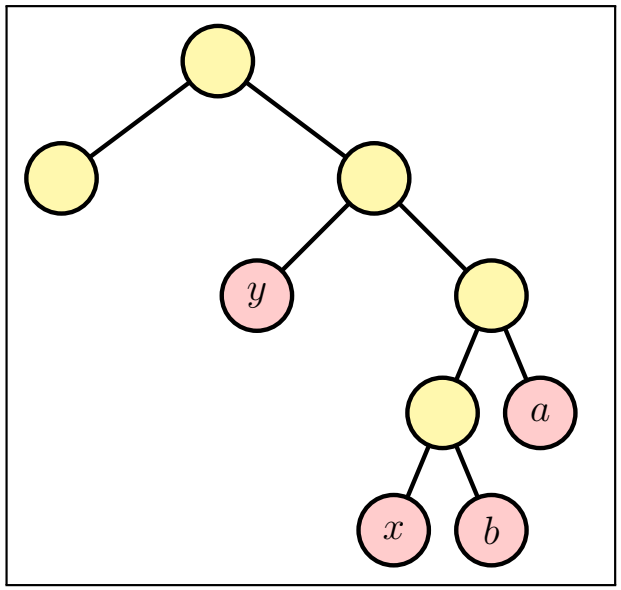
Dimostrazione

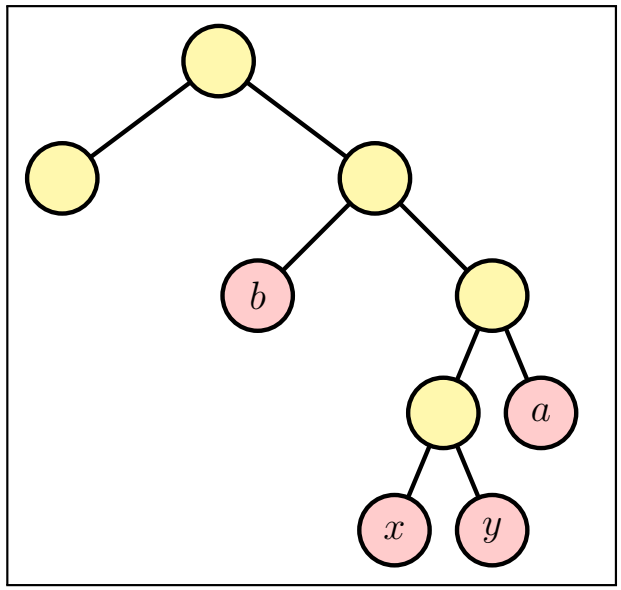
- Al solito, basata sulla trasformazione di una soluzione ottima
- Supponiamo che esista un codice ottimo T in cui i due caratteri a, b con profondità massima siano diversi da x, y

Scelta greedy

- Assumiamo senza perdere di generalità: $f[x] \leq f[y]$, $f[a] \leq f[b]$
- Poiché le frequenze di x e y sono minime: $f[x] \leq f[a]$, $f[y] \leq f[b]$
- Scambiamo x con a: otteniamo T'
- Scambiamo y con b: otteniamo T''







Scelta greedy

- Dimostriamo che: $C(f,T'') \leq C(f,T') \leq C(f,T)$

$$
\begin{aligned}
C(f,T) - C(f,T') &= \sum_{c\in\Sigma} f[c]d_T(c) - \sum_{c\in\Sigma} f[c]d_{T'}(c) \\
&= (f[x]d_T(x) + f[a]d_T(a)) - (f[x]d_{T'}(x) + f[a]d_{T'}(a)) \\
&= (f[x]d_T(x) + f[a]d_T(a)) - (f[x]d_T(a) + f[a]d_T(x)) \\
&= (f[a] - f[x])(d_T(a) - d_T(x)) \\
&\geq 0 \\
C(f,T') - C(f,T'') &\geq 0 \qquad \text{Come sopra}
\end{aligned}
$$

- Ma poiché T è ottimo, sappiamo anche che: $C(f,T) \leq C(f,T'')$
- Quindi T'' è anch'esso ottimo

Albero di copertura di peso minimo

Problema

Dato un grafo pesato, determinare come interconnettere tutti i suoi nodi minimizzando il costo del peso associato ai suoi archi.

- Albero di copertura (di peso) minimo
- Albero di connessione (di peso) minimo
- Minimum spanning tree

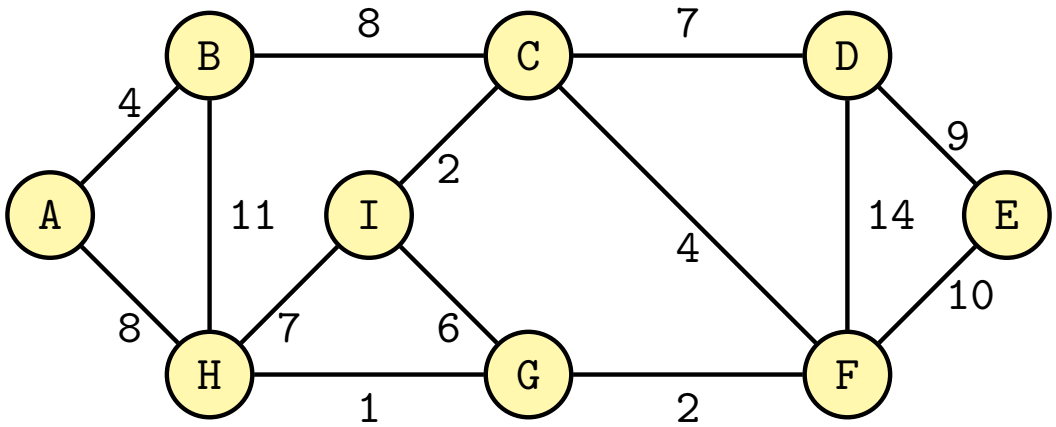
Esempio di applicazione

Una compagnia di telecomunicazioni deve stendere una nuova rete in un quartiere; deve seguire le connessioni esistenti (la rete stradale) e ogni arco ha un costo associato distinto (costi di scavo, etc.)

Definizione del problema

Input

- $G = (V, E)$: un grafo non orientato e connesso
- $w : V \times V \to \mathbb{R}$: una funzione di peso (costo di connessione)
  - se $(u, v) \in E$, allora $w(u, v)$ è il peso dell'arco (u, v)
  - se $(u, v) \notin E$, allora $w(u, v) = +\infty$
- Poiché G non è orientato, $w(u, v) = w(v, u)$

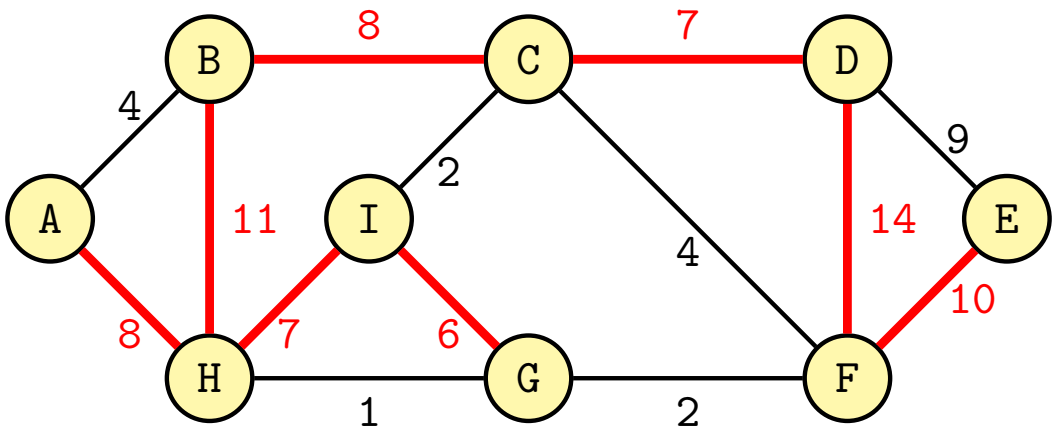


Definizione del problema

Albero di copertura (Spanning tree)

Dato un grafo $G = (V, E)$ non orientato e connesso, un albero di copertura di G è un sottografo $T = (V, E_T)$ tale che

- T è un albero
- $E_T \subseteq E$
- T contiene tutti i vertici di G



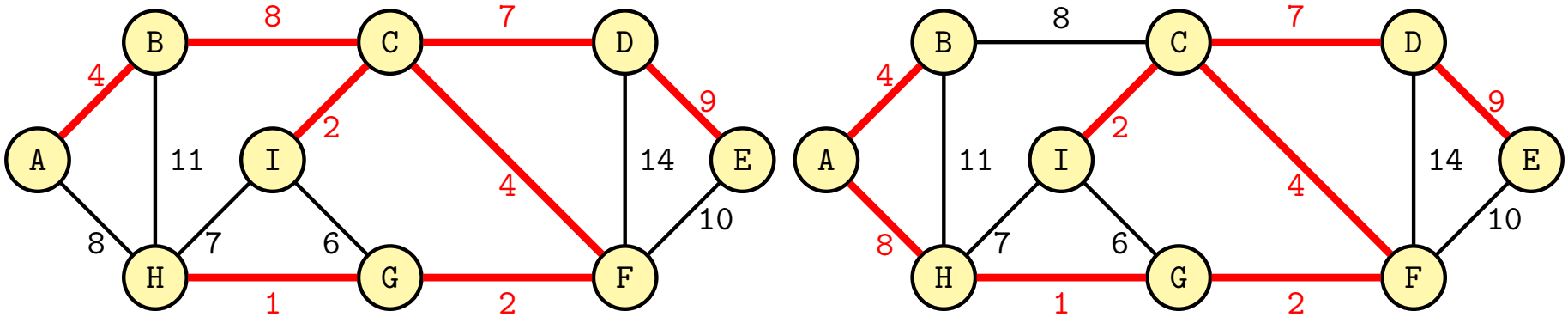
Definizione del problema

Output: albero di copertura di peso minimo

Trovare l'albero di copertura il cui peso totale sia minimo rispetto a ogni altro albero di copertura.

$$w(T) = \sum_{(u,v) \in E_T} w(u,v)$$

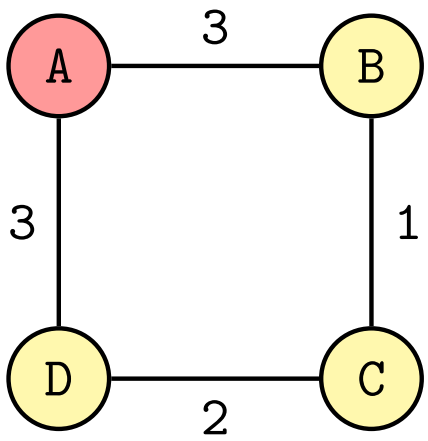
Non è detto che l'albero di copertura minimo sia univoco

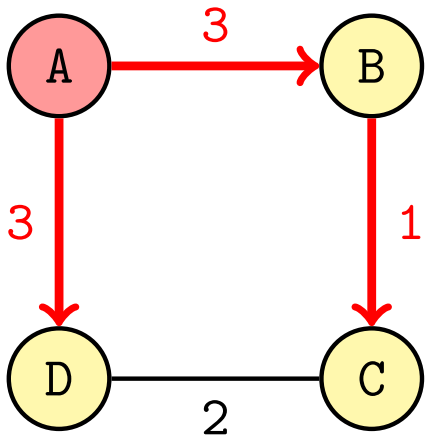


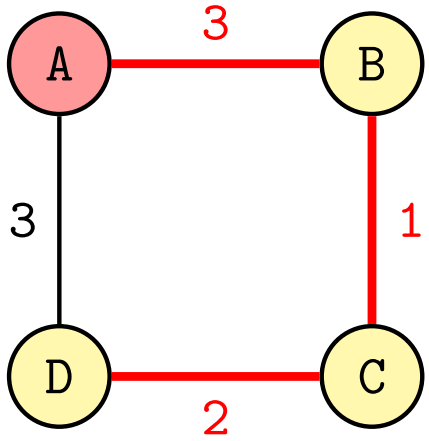
Cammini minimi / alberi di copertura di peso minimo

Questi due alberi di copertura sono identici?

- un albero dei cammini minimi da singola sorgente A
- un albero di copertura di peso minimo







Algoritmo generico

Schema della lezione

- Progettiamo un algoritmo di tipo "ingordo" generico
- Mostriamo due "istanze" di questo algoritmo: Kruskal e Prim

Approccio

L'idea è di accrescere un sottoinsieme A di archi in modo tale che venga sempre rispettata la seguente invariante:

- A è un sottoinsieme di qualche albero di connessione minimo

Algoritmo generico

Arco sicuro

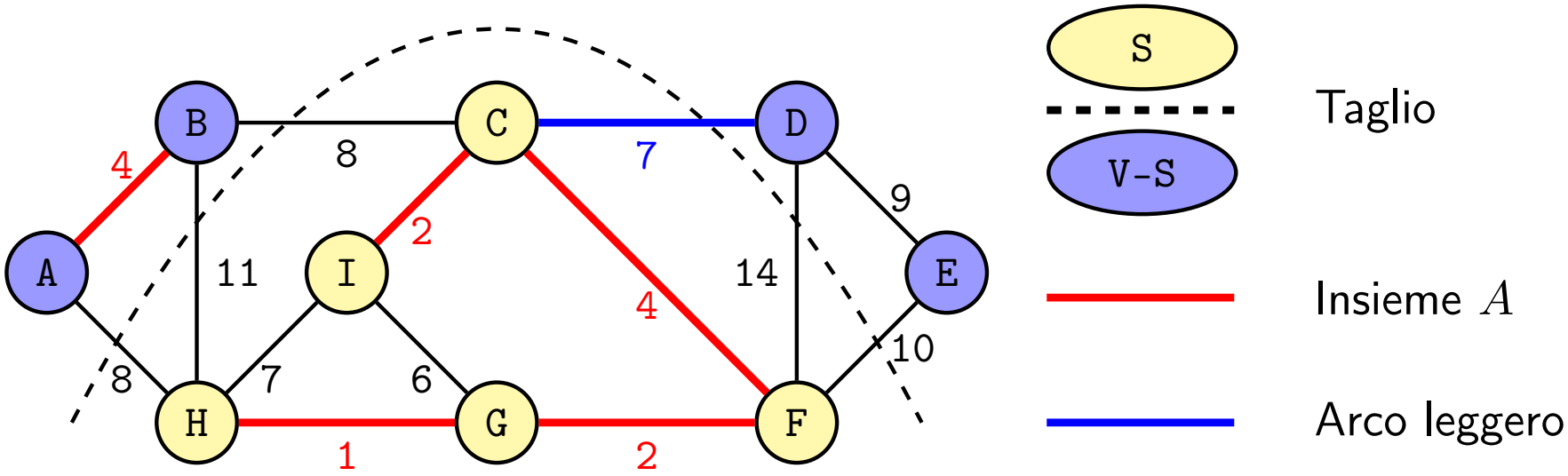
Un arco (u, v) è detto sicuro per A se $A \cup \{(u, v)\}$ è ancora un sottoinsieme di qualche albero di connessione minimo.

SET mst-generico(GRAPH G, **int**[ ] w)

SET $A = \emptyset$
while A non forma un albero di copertura **do**
    trova un arco sicuro (u, v)
    $A = A \cup \{(u, v)\}$
return A

Definizioni

- Un taglio $(S, V - S)$ di un grafo non orientato $G = (V, E)$ è una partizione di V in due sottoinsiemi disgiunti
- Un arco (u, v) attraversa il taglio se $u \in S$ e $v \in V - S$
- Un taglio rispetta un insieme di archi A se nessun arco di A attraversa il taglio
- Un arco che attraversa un taglio è leggero nel taglio se il suo peso è minimo fra i pesi degli archi che attraversano un taglio



Arco sicuro

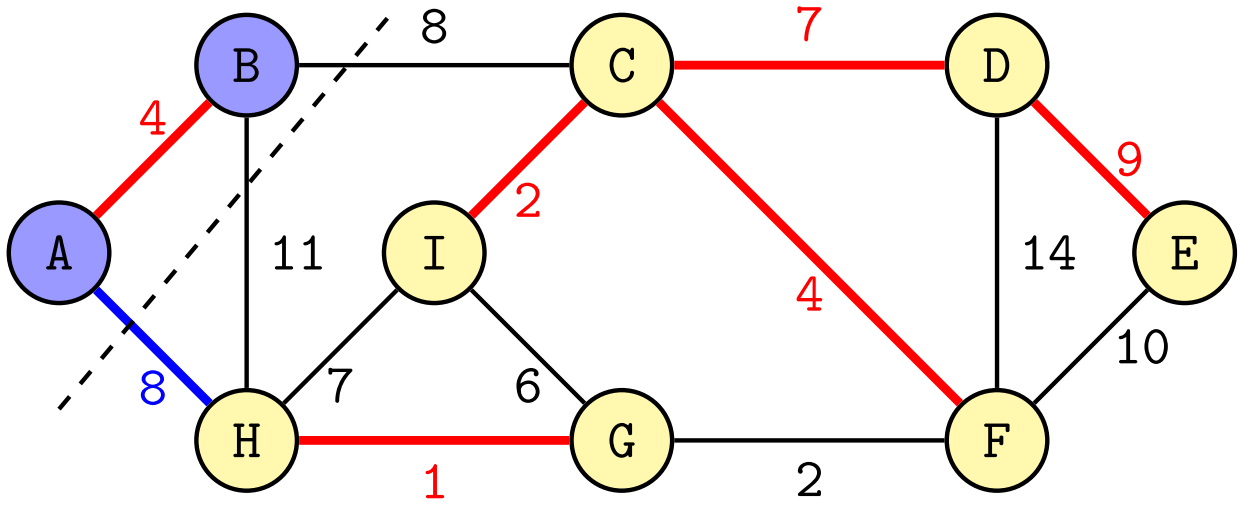
Teorema

- Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato e connesso
- Sia $w : V \times V \to \mathbb{R}$
- Sia $A \subseteq E$ un sottoinsieme contenuto in un qualche albero di copertura minimo per G
- Sia $(S, V - S)$ un qualunque taglio che rispetta A
- Sia (u, v) un arco leggero che attraversa il taglio

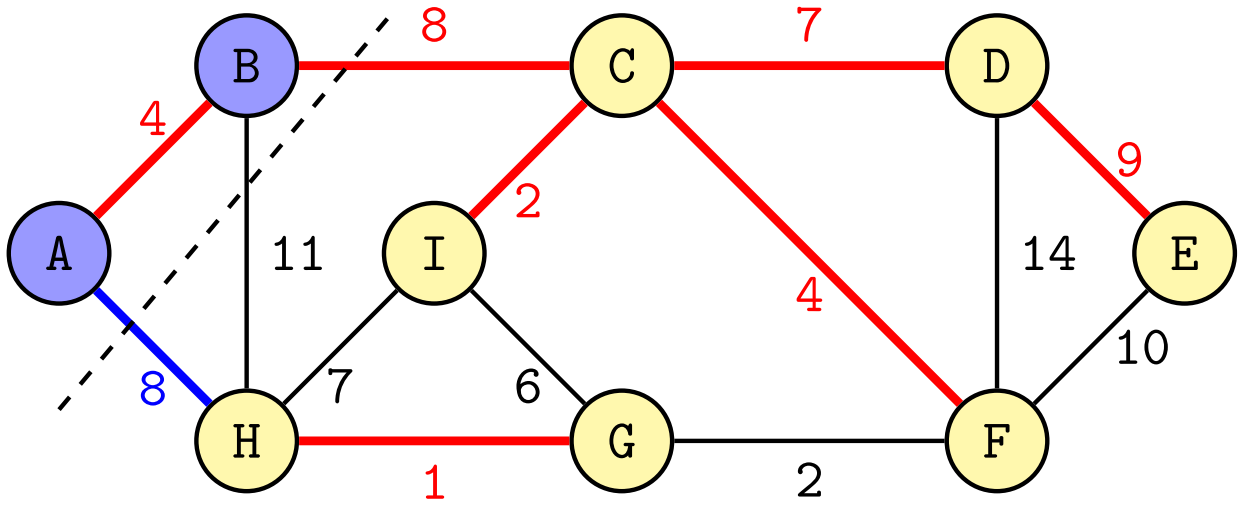
$\Rightarrow$ l'arco (u, v) è sicuro per A

Esempio: arco non sicuro perché il taglio non rispetta A

Arco blu sicuro

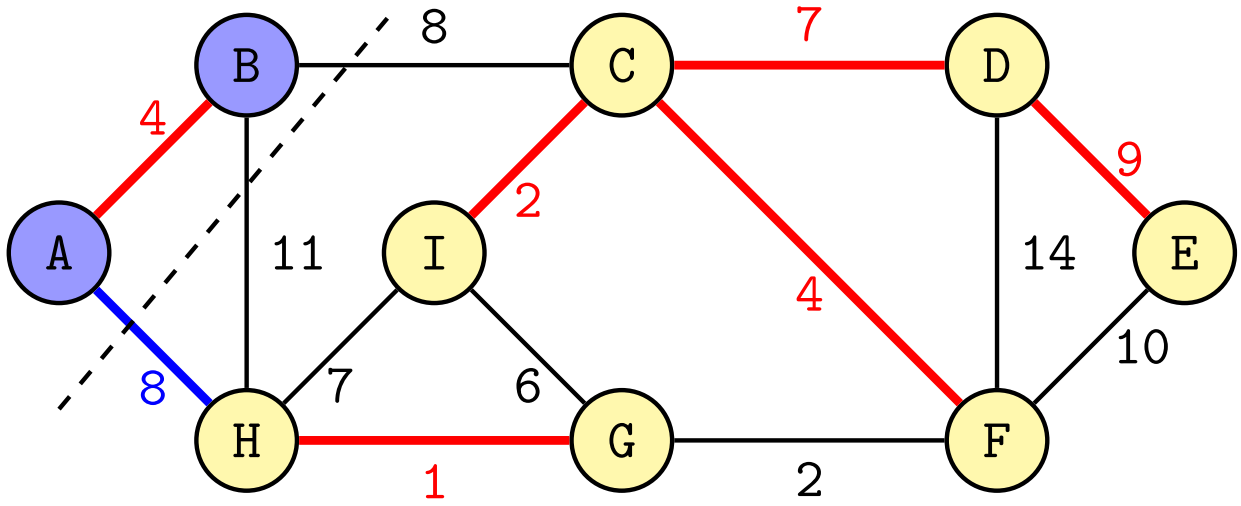


Arco blu non sicuro

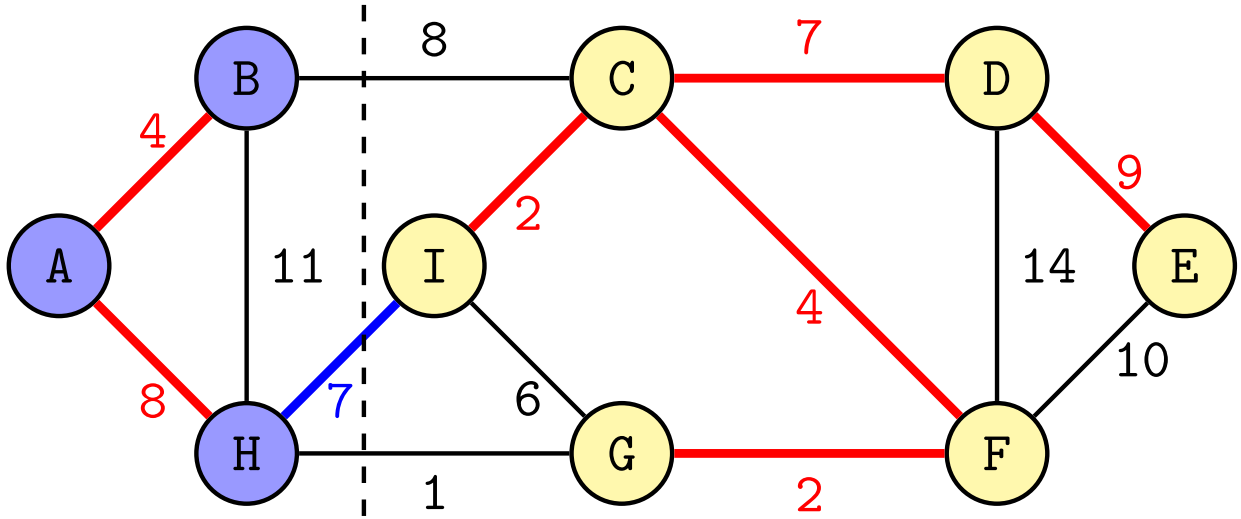


Esempio: arco non sicuro perché non leggero

Arco blu sicuro



Arco blu non sicuro



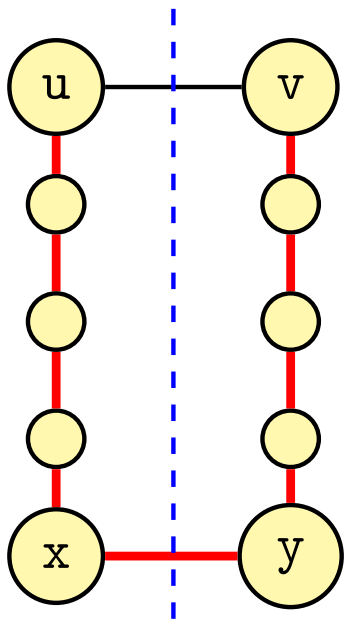
Dimostrazione

Dimostrazione

Sia T un albero di copertura minimo che contiene A. Due casi:

- $(u, v) \in T$: allora (u, v) è sicuro per A
- $(u, v) \notin T$: trasformiamo T in un albero T' contenente (u, v) e dimostriamo che T' è un albero di copertura minimo

- u, v sono connessi da un cammino $C \subseteq T$ (per definizione di albero)
- u, v stanno in lati opposti del taglio ((u, v) attraversa il taglio)
- $\exists (x, y) \in C$ che attraversa il taglio



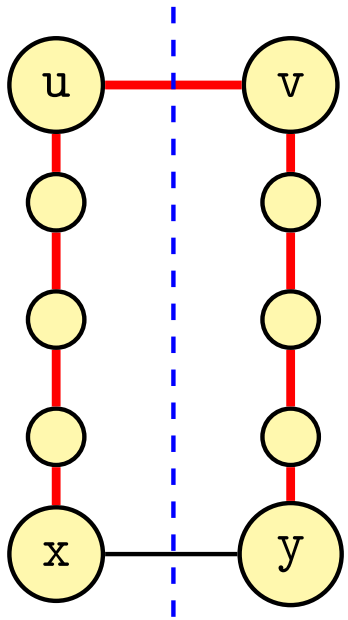
Dimostrazione

Dimostrazione

Sia T un albero di copertura minimo che contiene A. Due casi

- $(u, v) \in T$: allora (u, v) è sicuro per A
- $(u, v) \notin T$: trasformiamo T in un albero T' contenente (u, v) e dimostriamo che T' è un albero di copertura minimo

- $T' = T - \{(x, y)\} \cup \{(u, v)\}$
- T' è un albero di copertura
- $w(T') \leq w(T)$ (perchè $w(u, v) \leq w(x, y)$)
- $w(T) \leq w(T')$ (perchè T minimo)



Archi sicuri

Corollario

- Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato e connesso
- Sia $w : V \times V \to \mathbb{R}$
- Sia $A \subseteq E$ un sottoinsieme contenuto in un qualche albero di copertura minimo per G
- Sia C una componente connessa (un albero) nella foresta $G_A = (V, A)$
- Sia (u, v) un arco leggero che connette C a qualche altra componente in G_A

$\Rightarrow$ l'arco (u, v) è sicuro per A

Algoritmo di Kruskal

Idea

- Ingrandire sottoinsiemi disgiunti di un albero di copertura minimo connettendoli fra di loro fino ad avere l'albero complessivo
- Si individua un arco sicuro scegliendo un arco (u, v) di peso minimo tra tutti gli archi che connettono due distinti alberi (componenti connesse) della foresta
- L'algoritmo è greedy perché ad ogni passo si aggiunge alla foresta un arco con il peso minore

Implementazione

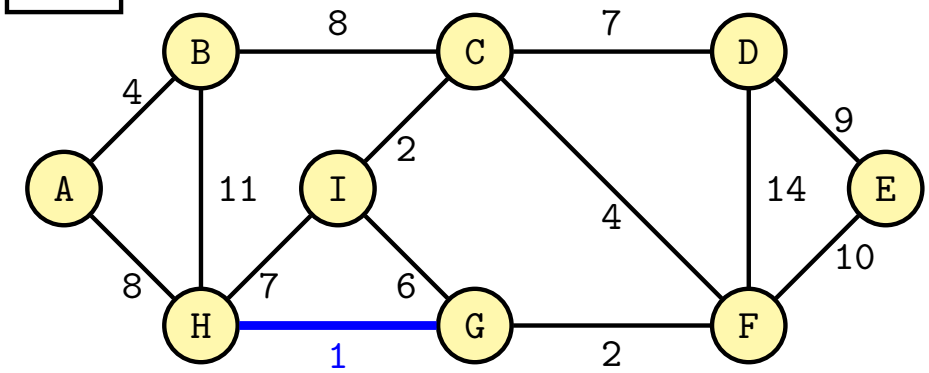
- Si utilizza una struttura dati Merge-Find Set

Algoritmo di Kruskal

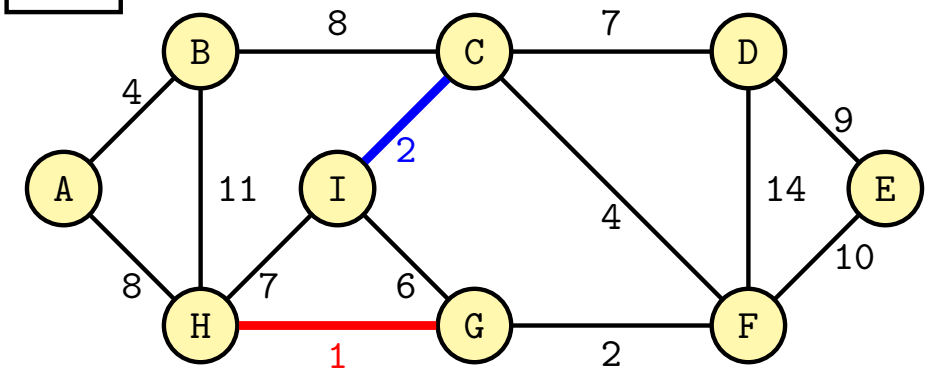
```
SET kruskal(EDGE[] A, int n, int m)
SET T = Set()
MFSET M = Mfset(n)
{ ordina A[1,...,m] in modo che A[1].weight ≤ ··· ≤ A[m].weight }
int count = 0
int i = 1
% Termina quando l'albero ha n − 1 archi o non ci sono più archi
while count < n − 1 and i ≤ m do
    if M.find(A[i].u) ≠ M.find(A[i].v) then
        M.merge(A[i].u, A[i].v)
        T.insert(A[i])
        count = count + 1
    i = i + 1
return T
```

Esempio

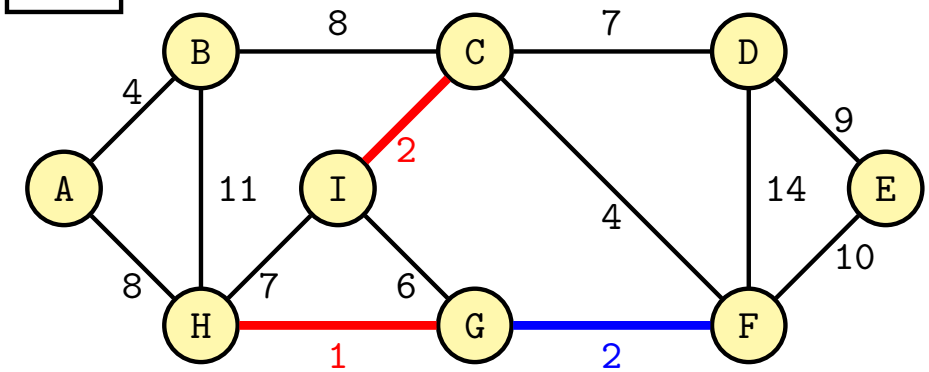
1



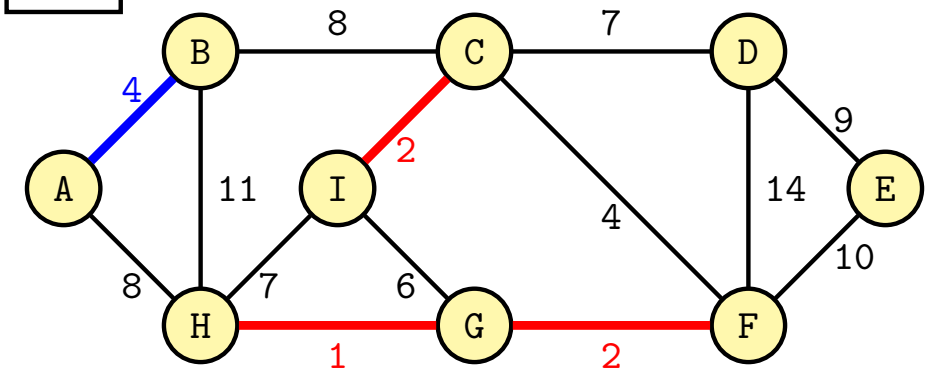
2



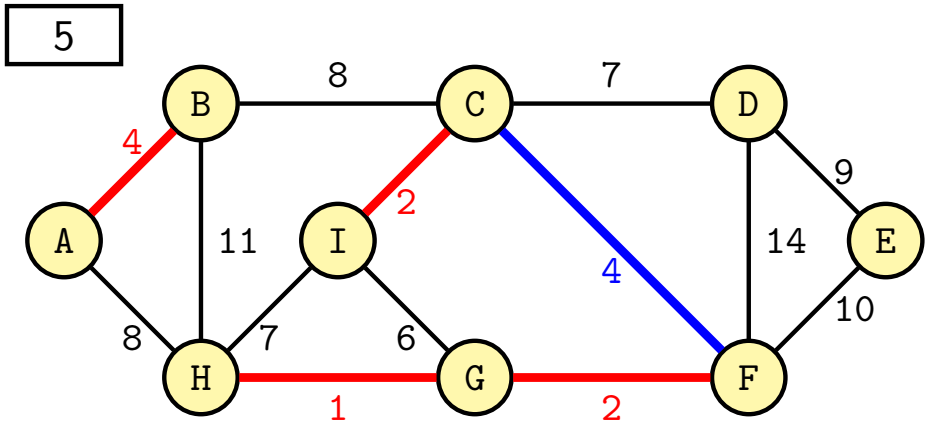
3

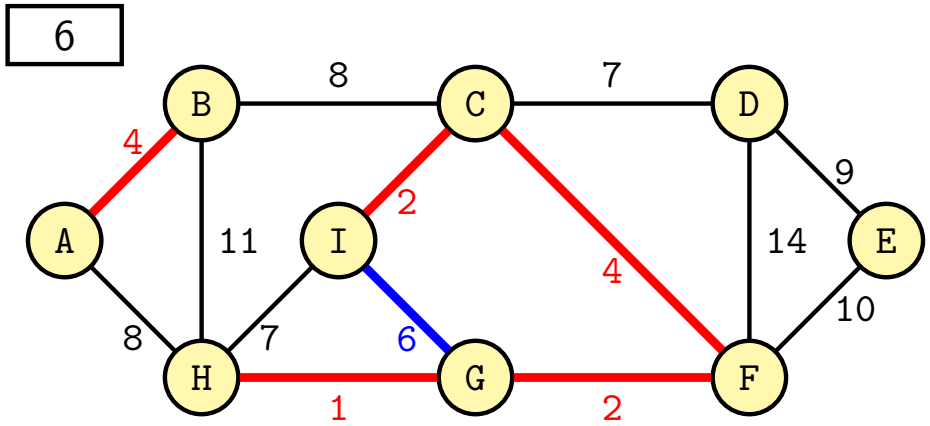


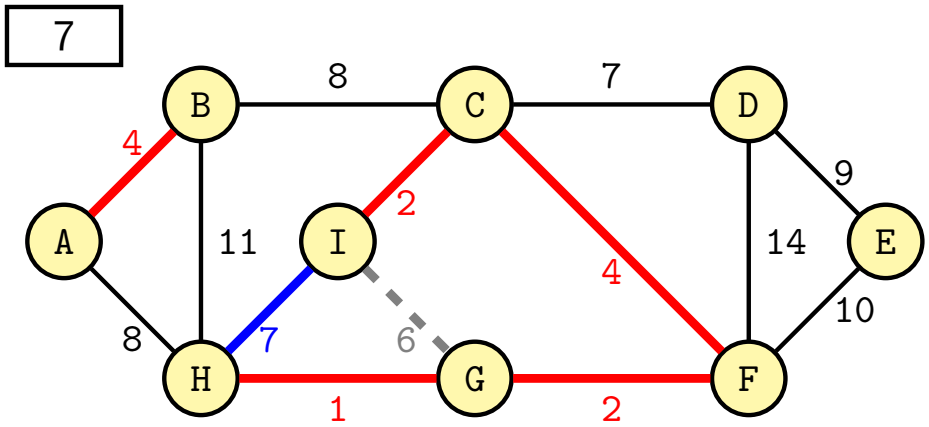
4

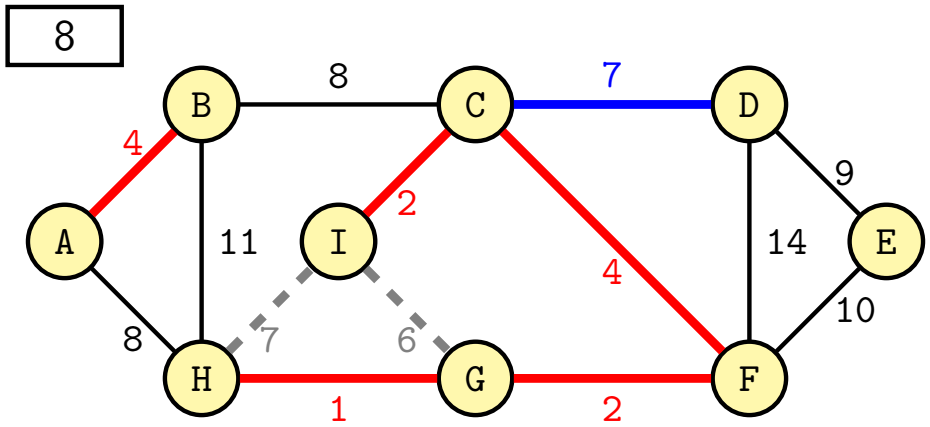


Esempio

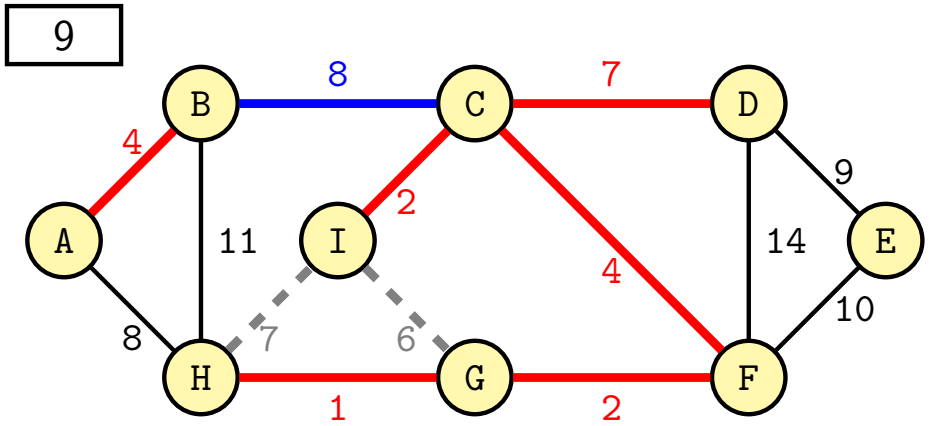

5
A
B
C
D
E
F
G
H
I
4
8
8
7
9
11
2
4
14
8
7
6
10
1
2

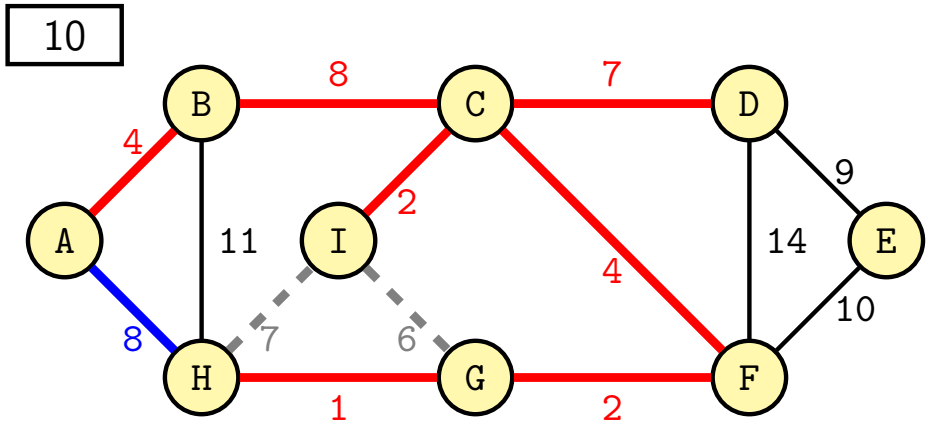

6
A
B
C
D
E
F
G
H
I
4
8
8
7
9
11
2
4
14
8
7
6
10
1
2

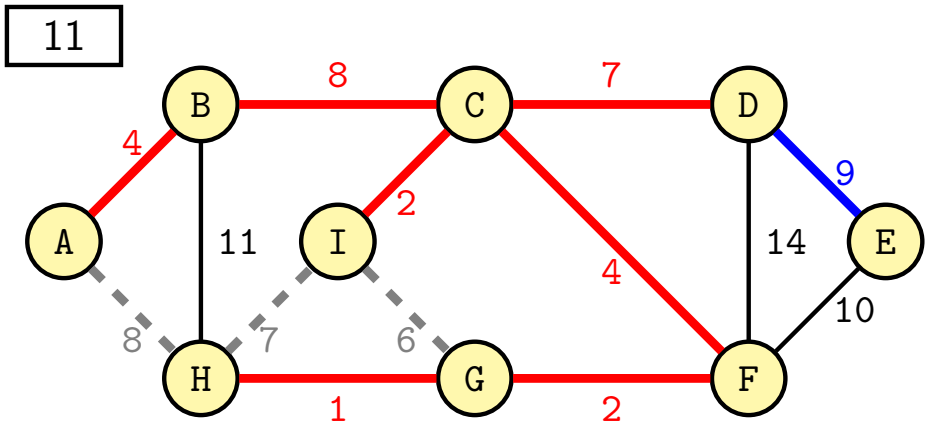

7
A
B
C
D
E
F
G
H
I
4
8
8
7
9
11
2
4
14
8
7
6
10
1
2

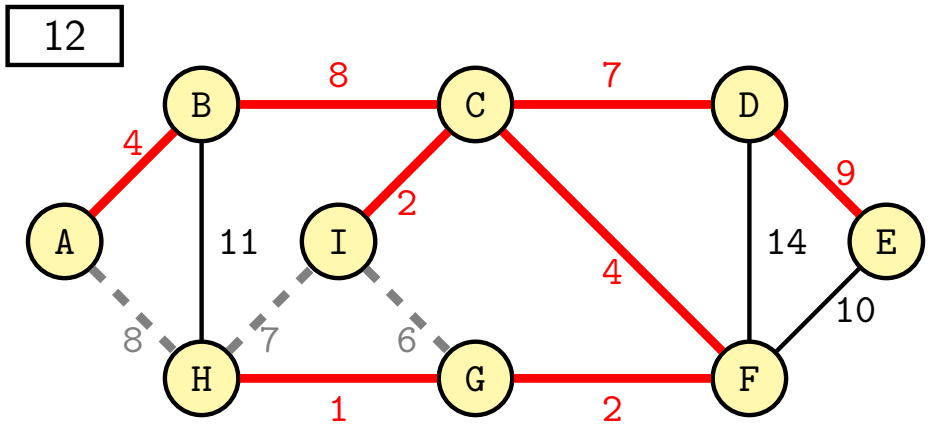

8
A
B
C
D
E
F
G
H
I
4
8
8
7
9
11
2
4
14
8
7
6
10
1
2

Esempio


9
A
B
C
D
E
F
G
H
I
4
8
11
8
7
2
4
14
9
10
7
6
1
2


10
A
B
C
D
E
F
G
H
I
4
8
11
8
7
2
4
14
9
10
7
6
1
2


11
A
B
C
D
E
F
G
H
I
4
8
11
8
7
2
4
14
9
10
7
6
1
2


12
A
B
C
D
E
F
G
H
I
4
8
11
8
7
2
4
14
9
10
7
6
1
2

Analisi della complessità algoritmo di Kruskal

- Il tempo di esecuzione per l'algoritmo di Kruskal dipende dalla realizzazione della struttura dati per Merge-Find Set
- Utilizziamo la versione con euristica sul rango + compressione, (*) le cui operazioni hanno costo ammortizzato costante

Fase	**Volte**	**Costo**
Inizializzazione	1	$O(n)$
Ordinamento	1	$O(m \log m)$
Operazioni find(),merge()	$O(m)$	$O(1)^{(*)}$

- Totale:
$O(n + m \log m + m) = O(m \log m) = O(m \log n^2) = O(m \log n)$

Algoritmo di Prim

Idea

- L'algoritmo di Prim procede mantenendo in A un singolo albero
- L'albero parte da un vertice arbitrario r (la radice) e cresce fino a quando non ricopre tutti i vertici
- Ad ogni passo viene aggiunto un arco leggero che collega un vertice in V_A con un vertice in $V - V_A$, dove V_A è l'insieme di nodi raggiunti da archi in A

Correttezza

- $(V_A, V - V_A)$ è un taglio che rispetta A (per definizione)
- Per il corollario, gli archi leggeri che attraversano il taglio sono sicuri

Implementazione

Struttura dati per i nodi non ancora nell'albero

- Durante l'esecuzione, i vertici non ancora nell'albero si trovano in una coda con min-priorità Q ordinata in base alla seguente definizione di priorità
- "La priorità del nodo v è il peso minimo di un arco che collega v ad un vertice nell'albero, o $+\infty$ se tale arco non esiste"

Albero registrato come vettore dei padri

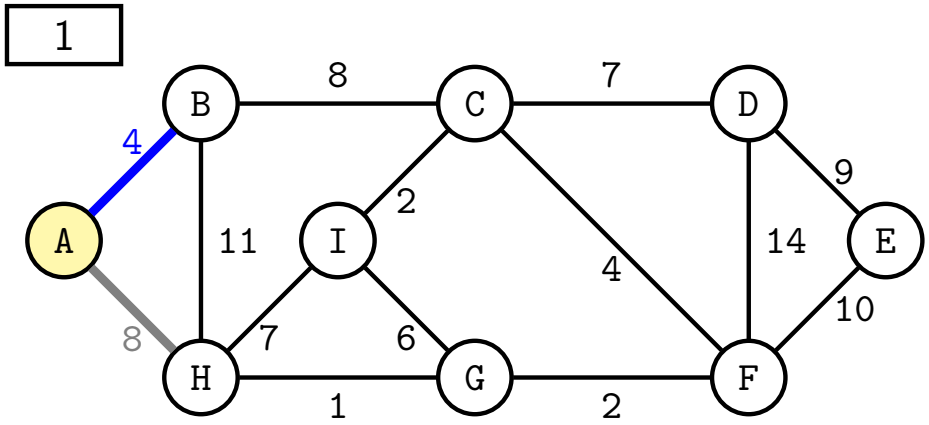
- Ogni nodo v mantiene un puntatore al padre $p[v]$
- A è mantenuto implicitamente:
  $A = \{(v, p[v]) \mid v \in V - Q - \{r\}\}$

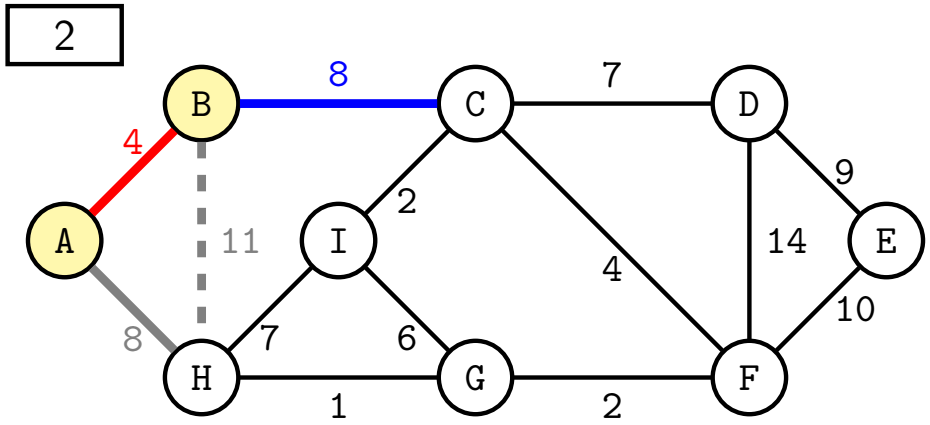
Algoritmo di Prim

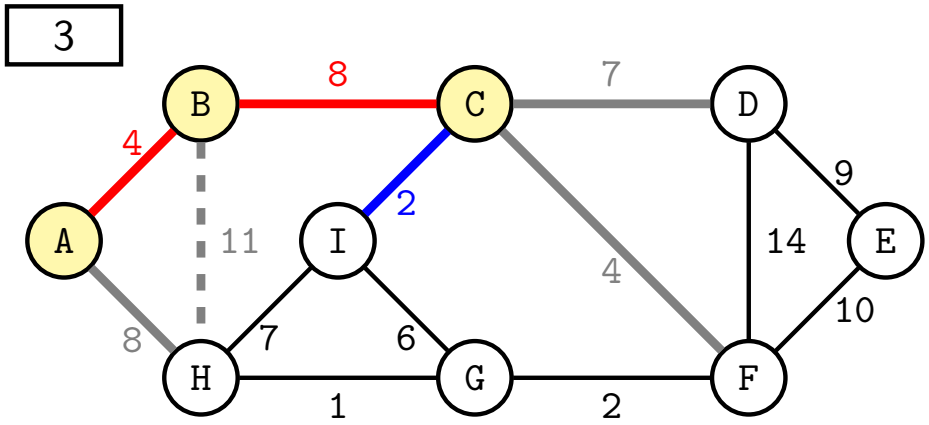
int[ ] prim(GRAPH G, NODE r)

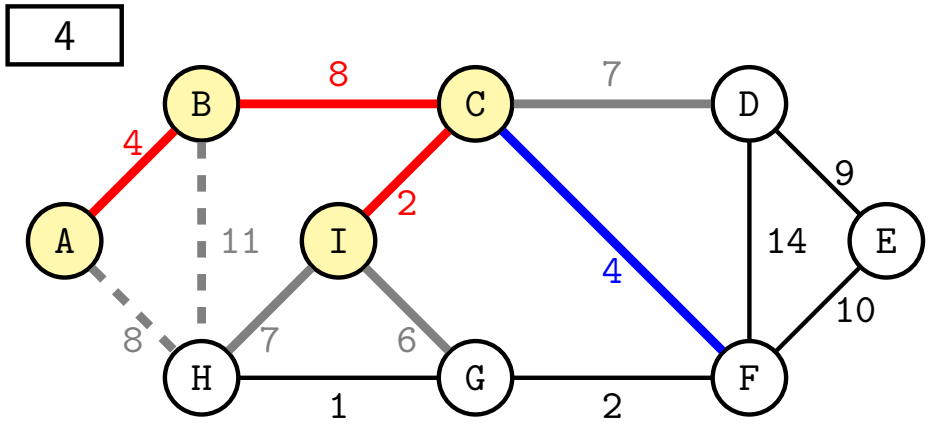
```
PRIORITYQUEUE Q = MinPriorityQueue()
PRIORITYITEM[ ] pos = new PRIORITYITEM[1 ... G.n]
int[ ] p = new int[1 ... G.n]
foreach u ∈ G.V() − {r} do
    pos[u] = Q.insert(u, +∞)
pos[r] = Q.insert(r, 0)
p[r] = 0
while not Q.isEmpty() do
    NODE u = Q.deleteMin()
    pos[u] = nil
    foreach v ∈ G.adj(u) do
        if pos[v] ≠ nil and w(u, v) < pos[v].priority then
            Q.decrease(pos[v], w(u, v))
            p[v] = u
return p
```

Esempio

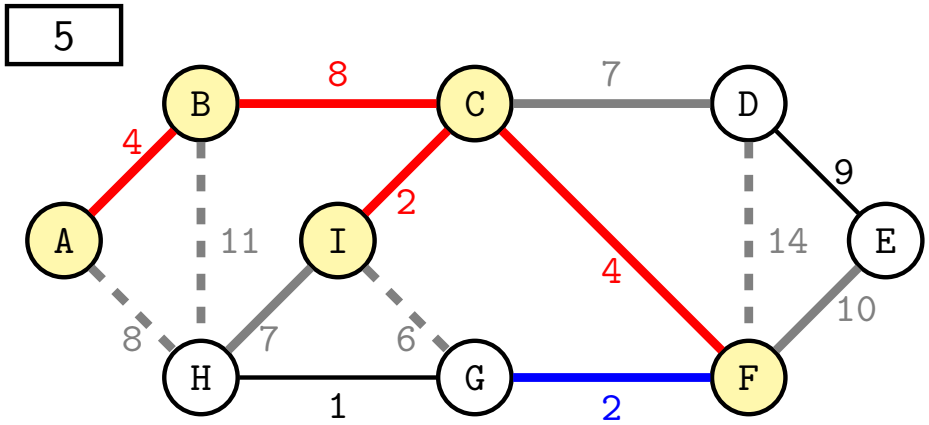

1
A
B
C
D
E
F
G
H
I
4
8
8
7
9
11
2
4
14
10
8
7
6
1
2

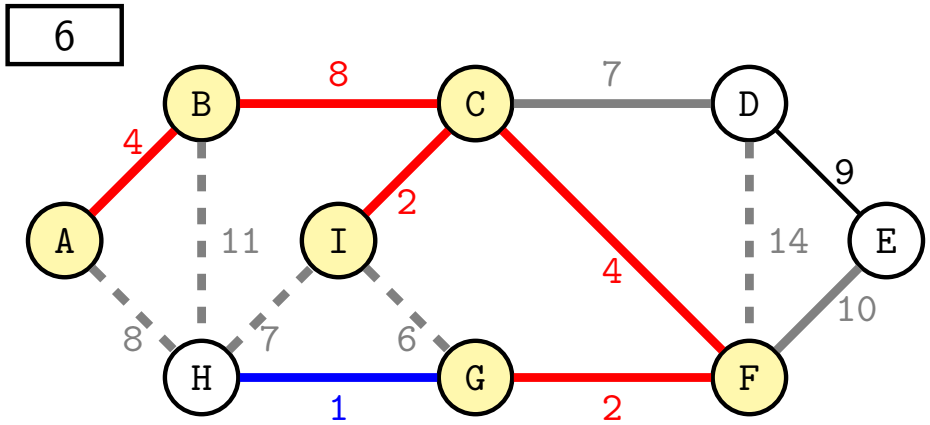

2
A
B
C
D
E
F
G
H
I
4
8
8
7
9
11
2
4
14
10
8
7
6
1
2

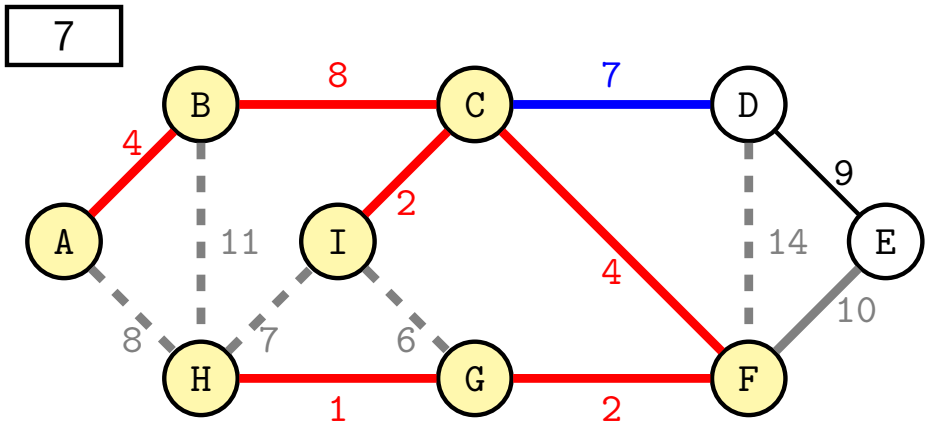

3
A
B
C
D
E
F
G
H
I
4
8
8
7
9
11
2
4
14
10
8
7
6
1
2

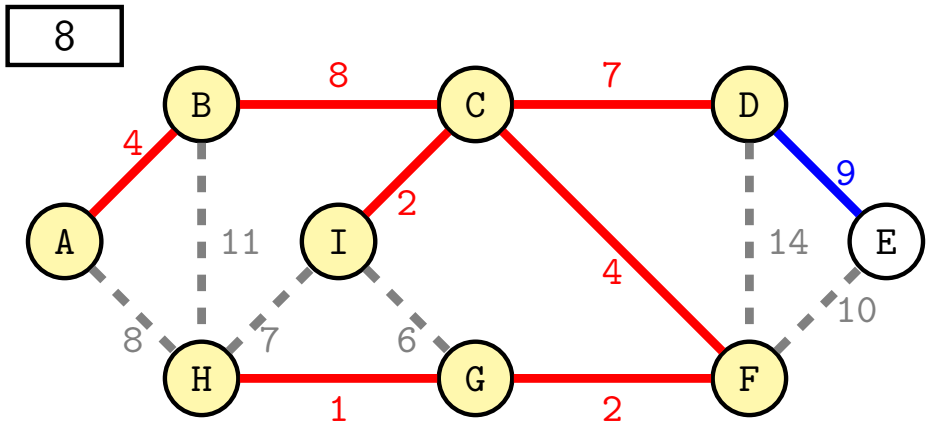

4
A
B
C
D
E
F
G
H
I
4
8
8
7
9
11
2
4
14
10
8
7
6
1
2

Esempio

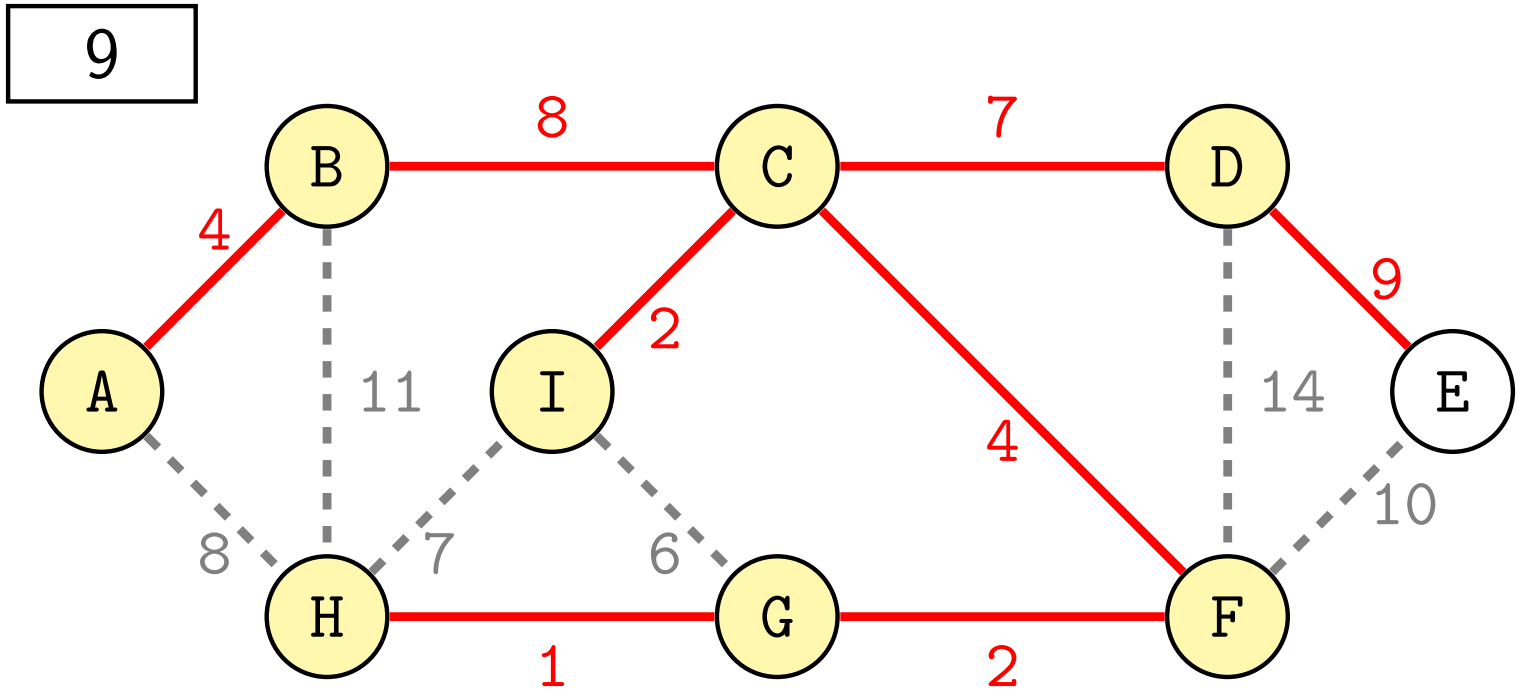

5
A
B
C
D
E
F
G
H
I
4
8
11
8
7
2
7
4
14
9
10
6
1
2


6
A
B
C
D
E
F
G
H
I
4
8
11
8
7
2
7
4
14
9
10
6
1
2


7
A
B
C
D
E
F
G
H
I
4
8
11
8
7
2
7
4
14
9
10
6
1
2


8
A
B
C
D
E
F
G
H
I
4
8
11
8
7
2
7
4
14
9
10
6
1
2

Esempio



Algoritmo di Prim: Analisi

L'efficienza dell'algoritmo di Prim dipende dalla coda con priorità

- Se si utilizza uno heap binario:

Fase	**Volte**	**Costo**
Inizializzazione	1	$O(n \log n)$
deleteMin()	$O(n)$	$O(\log n)$
decreasePriority()	$O(m)$	$O(\log n)$

  Tempo totale: $O(n + n \log n + m \log n) = O(m \log n)$, asintoticamente uguale a quello di Kruskal.

- Cosa succede se la coda con priorità è implementata tramite vettore non ordinato?

Discussione

Vero o falso

- L'arco con peso minimo è sicuro
- L'arco con il secondo peso minimo è sicuro
- L'arco con il terzo peso minimo è sicuro

Albero di copertura minima in un piano

- Input: n punti nel piano
- Il peso di una coppia di punti è dato dalla distanza euclidea fra di essi
- Trovare un insieme di connessioni di peso minimo
- Da non confondere con gli Steiner tree

Applicazioni

Applicazioni dirette per la progettazione

- Reti di telecomunicazione
- Reti idriche
- Reti di trasporto
- Reti elettriche

Alcuni utilizzi particolari

- Segmentazione di immagini
- Riconoscimento scrittura manuale
- Disegno di circuiti elettronici
- Progettazione tassonomie

Prospettiva storica

- $O(m \log n)$:
  - Primo algoritmo: Boruvka (1926)
  - Kruskal (1956)
  - Prim (1957), ma anche Jarnik (1930)
- $O(m + n \log n)$:
  - Fredman-Tarjan (1987)
  - Modifica di Prim che utilizza gli heap di Fibonacci
- $O(m + n)$:
  - Algoritmo probabilistico di Karger, Klein, Tarjan (1995)
  - Vari algoritmi in tempo lineare per casi particolari
  - Questione aperta se si possa risolvere il problema in tempo lineare deterministico

Conclusioni

Vantaggi

- Semplici da programmare
- Molto efficienti
- Quando è possibile dimostrare la proprietà di scelta ingorda, danno la soluzione ottima
- La soluzione sub-ottima può essere accettabile

Svantaggi

- Non sempre applicabili se si vuole la soluzione ottima