

# Algoritmi e Strutture Dati

## Programmazione dinamica – Parte 3

Alberto Montresor

Università di Trento

2024/03/10

This work is licensed under a Creative Commons  
Attribution-ShareAlike 4.0 International License.



# Sommario

- 1 String matching approssimato
- 2 Prodotto di catena di matrici
- 3 Insieme indipendente di intervalli pesati

# String matching approssimato

## Definizione

Siano:

- $P = p_1 \dots p_m$  una stringa detta **pattern**
- $T = t_1 \dots t_n$  una stringa detta **testo**, con  $m \leq n$ ,

Un'**occorrenza  $k$ -approssimata** di  $P$  in  $T$  è una copia di  $P$  in  $T$  in cui sono ammessi  $k$  "errori" tra  $P$  e  $T$ , del seguente tipo:

- 1 i corrispondenti caratteri in  $P, T$  sono diversi (**sostituzione**)
- 2 un carattere in  $P$  non è incluso in  $T$  (**inserimento**)
- 3 un carattere in  $T$  non è incluso in  $P$  (**cancellazione**)

## Esempio

$T =$  questo è un **o**scempio

$P =$  un **e**sempio

# Esempio

## Problema – Approximated string matching

Trovare un'occorrenza  $k$ -approssimata di  $P$  in  $T$  con  $k$  minimo ( $0 \leq k \leq m$ ).

## Spiegazione

- Qual è il minimo valore  $k$  per cui si trova un'occorrenza  $k$ -approssimata di  $P$  in  $T$ ?
- Dove?
- Con quali errori?

## Sottostruttura ottima

### Definizione

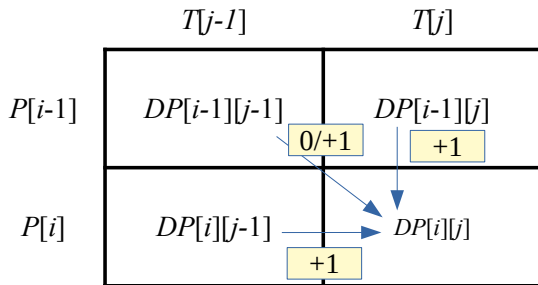
Sia  $DP[0 \dots m][0 \dots n]$  una tabella di programmazione dinamica tale che  $DP[i][j]$  sia il minimo valore  $k$  per cui esiste un'occorrenza  $k$ -approssimata di  $P(i)$  in  $T(j)$  che termina nella posizione  $j$

### Quattro possibilità

$DP[i - 1][j - 1]$ , se $P[i] = T[j]$	avanza su entrambi i caratteri (uguali)
$DP[i - 1][j - 1] + 1$ , se $P[i] \neq T[j]$	avanza su entrambi i caratteri ( <b>sost.</b> )
$DP[i - 1][j] + 1$	avanza sul pattern ( <b>inserimento</b> )
$DP[i][j - 1] + 1$	avanza sul testo ( <b>cancellazione</b> )

## Sottostruttura ottima

$$DP[i][j] = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ i & j = 0 \\ \min\{DP[i-1][j-1] + \delta, & \delta = \text{iif}(P[i] = T[j], 0, 1) \\ DP[i-1][j] + 1, \\ DP[i][j-1] + 1\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$



## Dove si trova la soluzione finale?

- $DP[m][j] = k$  se e solo se esiste un'occorrenza  $k$ -approssimata di  $P$  in  $T(j)$  che termina nella posizione  $j$ .
- La soluzione del problema è data dal più piccolo valore  $DP[m][j]$ , per  $0 \leq j \leq n$

		T				
		A	B	A	B	A
P		0	0	0	0	0
		1	1	0	1	0
B		2	1	0	1	0
A		3	2	1	1	0
B		2	1	1	0	1

The table above shows a dynamic programming table for string matching. The rows represent the pattern string  $P$  (B, A, B) and the columns represent the text string  $T$  (A, B, A, B, A). The values in the cells represent the edit distance  $DP[m][j]$ . Red annotations highlight specific transitions: a red '1' above the cell (B, A) and a red '2' below it; a red '1' above the cell (A, A) and a red '2' below it; and a red '0' above the cell (B, B) and a red '2' below it.

# Algoritmo

---

```

int stringMatching(ITEM[] P, ITEM[] T, int m, int n)


---


int[][] DP = new int[0...m][0...n]
for j = 0 to n do DP[0][j] = 0                                % Caso base: i = 0
for i = 1 to m do DP[i][0] = i                                % Caso base: j = 0
for i = 1 to m do                                           % Caso generale
    for j = 1 to n do
        DP[i][j] = min(DP[i - 1][j - 1] + iif(P[i] == T[j], 0, 1),
                       DP[i - 1][j] + 1,
                       DP[i][j - 1] + 1)
int pos = 0                                                  % Calcola minimo ultima riga
for j = 1 to n do
    if DP[m][j] < DP[m][pos] then
        pos = j
return pos

```

---



# String matching approssimato

## Take-home message – prendi e porta a casa

- Non è detto che la "soluzione finale" si trovi nella casella "in basso a destra";
- È invece possibile che la soluzione debba essere ricercata essa stessa nella tabella *DP*

# Reality check

Approximate String Matching è un esempio di **string metric**:

*[...] is a metric that measures distance ("inverse similarity") between two strings [...]*

*String metrics are used heavily in information integration and are currently used in areas including fraud detection, fingerprint analysis, plagiarism detection, ontology merging, DNA analysis, RNA analysis, image analysis, evidence-based machine learning, database data deduplication, data mining, incremental search, data integration, and semantic knowledge integration.*

[https://en.wikipedia.org/wiki/String\\_metric](https://en.wikipedia.org/wiki/String_metric)

## Esempi

**Edit distance**, detta anche **distanza di Levenshtein**

# Prodotto di catena di matrici

## Problema

Data una sequenza di  $n$  matrici  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ , compatibili due a due al prodotto, vogliamo calcolare il loro prodotto.

- Il prodotto di matrici non è **commutativo** ....
- ...ma è **associativo**:  $(A_1 \cdot A_2) \cdot A_3 = A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3)$

## Cosa vogliamo ottimizzare

- Il prodotto di matrici si basa sulla **moltiplicazione scalare** come operazione elementare
- Vogliamo calcolare il prodotto delle  $n$  matrici impiegando il più basso numero possibile di moltiplicazioni scalari

## Esempio 1

A	$100 \times 1$
B	$1 \times 100$
C	$100 \times 1$

	<b># Moltiplicazioni</b>	<b>Memoria</b>
$(A \cdot B)$	$100 \times 1 \times 100 = 10000$	10000
$((A \cdot B) \cdot C)$	$\underline{100 \times 100 \times 1 = 10000}$ 20000	$\underline{100}$ 10100
$(B \cdot C)$	$1 \times 100 \times 1 = 100$	1
$(A \cdot (B \cdot C))$	$\underline{100 \times 1 \times 1 = 100}$ 200	$\underline{100}$ 101

## Esempio 2

A	$50 \times 10$
B	$10 \times 40$
C	$40 \times 30$
D	$30 \times 5$

$(( (A \cdot B) \cdot C) \cdot D) : 87500$  moltiplicazioni

$(( A \cdot ( B \cdot C )) \cdot D) : 34500$  moltiplicazioni

$(( A \cdot B ) \cdot ( C \cdot D )) : 36000$  moltiplicazioni

$( A \cdot (( B \cdot C ) \cdot D )) : 16000$  moltiplicazioni

$( A \cdot ( B \cdot ( C \cdot D ))) : 10500$  moltiplicazioni

$(( (A \cdot B) \cdot C) \cdot D) : 87500$

$( A \cdot B ) \quad 50 \times 10 \times 40 = 20000$

$(( A \cdot B ) \cdot C ) \quad 50 \times 40 \times 30 = 60000$

$(( A \cdot B ) \cdot C ) \cdot D \quad \underline{50 \times 30 \times 5 = 7500}$

87500

# Parentesizzazione

## Parentesizzazione

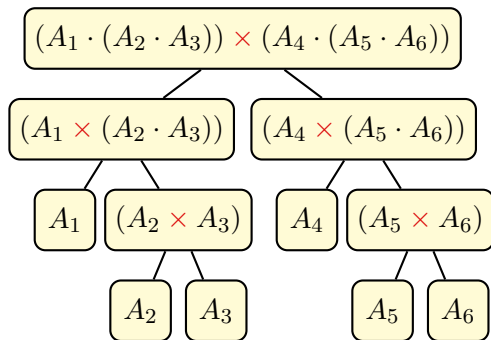
Una **parentesizzazione**  $P_{i,j}$  del prodotto  $A_i \cdot A_{i+1} \cdots A_j$  consiste:

- nella matrice  $A_i$ , se  $i = j$ ;
- nel prodotto di due parentesizzazioni  $(P_{i,k} \cdot P_{k+1,j})$ , altrimenti.

## Esempio

$$(A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3)) \times (A_4 \cdot (A_5 \cdot A_6))$$

In questo caso,  $k = 3$  e il prodotto evidenziato è detto "**ultimo prodotto**"



# Parentesizzazione ottima

## Parentesizzazione ottima

La parentesizzazione che richiede il minor numero di moltiplicazioni scalari per essere completata, fra tutte le parentesizzazioni possibili.

## Motivazione

Vale la pena preprocessare i dati per cercare la parentesizzazione migliore, per risparmiare tempo dopo nel calcolo vero e proprio

## Domanda

Quante sono le parentesizzazioni possibili?

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(n)$	1	1	2	5	?	?	?	?	?	?

## Parentesizzazione ottima

- $P(n)$ : numero di parentesizzazioni per  $n$  matrici  $A_1 \cdot \dots \cdot A_n$
- L'ultimo prodotto può occorrere in  $n - 1$  posizioni diverse
- Fissato l'indice  $k$  dell'ultimo prodotto, abbiamo:
  - $P(k)$  parentesizzazioni per  $A_1 \cdot \dots \cdot A_k$
  - $P(n - k)$  parentesizzazioni per  $A_{k+1} \cdot \dots \cdot A_n$

$$P(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ \sum_{k=1}^{n-1} P(k)P(n-k) & n > 1 \end{cases}$$

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(n)$	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862



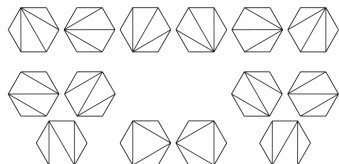
# Parentesizzazione ottima

## Numero di Catalan

$$P(n) = C(n) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \Theta\left(\frac{4^n}{n\sqrt{n}}\right)$$

### In matematica

$C(n)$ : numero di modi in cui un poligono convesso con  $n + 2$  lati può essere suddiviso in triangoli.



### Esercizio

Dimostrare che  $P(n) = \Omega(2^n)$

### Implicazione

Algoritmi di forza bruta non vanno quindi bene

## Definizioni matematiche

$A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n$	il prodotto di $n$ matrici da ottimizzare
$c_{i-1}$	il numero di righe della matrice $A_i$
$c_i$	il numero di colonne della matrice $A_i$
$A[i \dots j]$	il sottoprodotto $A_i \cdot A_{i+1} \cdot \dots \cdot A_j$
$P[i \dots j]$	una parentesizzazione per $A[i \dots j]$ (non necessariamente ottima)

# Struttura di una parentesizzazione ottima

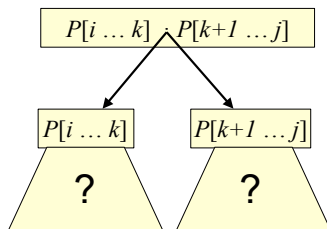
## Osservazioni

- Sia  $A[i \dots j]$  una sottosequenza del prodotto di matrici
- Si consideri una parentesizzazione ottima  $P[i \dots j]$  di  $A[i \dots j]$
- Esiste un **ultimo prodotto**: esiste un indice  $k$  tale che

$$P[i \dots j] = P[i \dots k] \cdot P[k + 1 \dots j]$$

## Domanda

Quali sono le caratteristiche dei due sottoprodotti  $P[i \dots k]$  e  $P[k + 1 \dots j]$ ?



# Teorema sottostruttura ottima

## Teorema

Se  $P[i \dots j] = P[i \dots k] \cdot P[k+1 \dots j]$  è una parentesizzazione ottima del prodotto  $A[i \dots j]$ , allora:

- $P[i \dots k]$  è parentesizzazione ottima del prodotto  $A[i \dots k]$
- $P[k+1 \dots j]$  è parentesizzazione ottima del prodotto  $A[k+1 \dots j]$

## Dimostrazione – per assurdo

- Supponiamo esista un parentesizzazione ottima  $P'[i \dots k]$  di  $A[i \dots k]$  con costo inferiore a  $P[i \dots k]$ .
- Allora,  $P'[i \dots k] \cdot P[k+1 \dots j]$  sarebbe una parentesizzazione di  $A[i \dots j]$  con costo inferiore a  $P[i \dots j]$ , assurdo.

## Valore della soluzione ottima

Sia  $DP[i][j]$  il minimo numero di moltiplicazioni scalari necessarie per calcolare il prodotto  $A[i \dots j]$

- **Caso base:**  $i = j$ . Allora  $DP[i][j] = 0$
- **Passo ricorsivo:**  $i < j$ . Esiste una parentesizzazione ottima

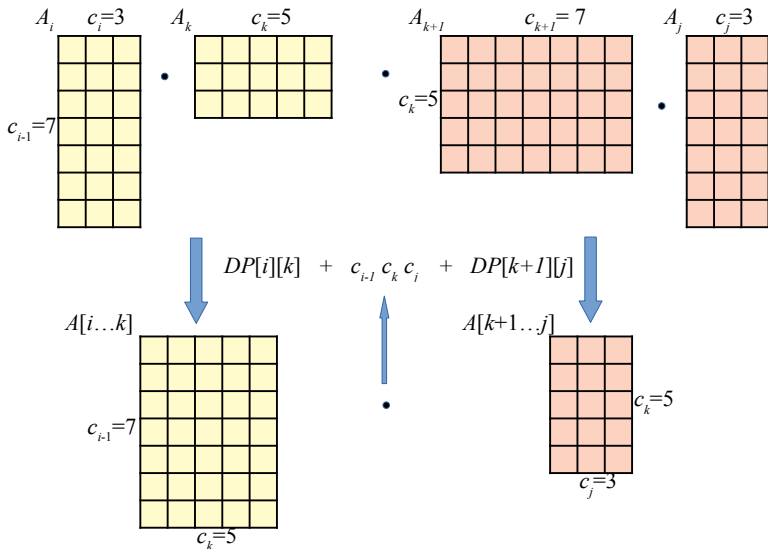
$$P[i \dots j] = P[i \dots k] \cdot P[k + 1 \dots j]$$

Sfruttando la ricorsione:

$$DP[i][j] = DP[i][k] + DP[k + 1][j] + c_{i-1} \cdot c_k \cdot c_j$$

- $c_{i-1} \cdot c_k \cdot c_j$  è il costo per moltiplicare
  - la matrice  $A_i \dots A_k$ :  $c_{i-1}$  righe,  $c_k$  colonne
  - la matrice  $A_{k+1} \dots A_j$ :  $c_k$  righe,  $c_j$  colonne

# Valore della soluzione ottima



## Valore della soluzione ottima

Ma qual è il valore di  $k$ ?

- Non lo conosciamo....
- ... ma possiamo provarli tutti!
- $k$  può assumere valori fra  $i$  e  $j - 1$

### Formula finale

$$DP[i][j] = \begin{cases} 0 & i = j \\ \min_{i \leq k < j} \{ DP[i][k] + DP[k+1][j] + c_{i-1} \cdot c_k \cdot c_j \} & i < j \end{cases}$$

## Esempio

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6
1	0	0				
2	-	0				
3	-	-	0			
4	-	-	-	0		
5	-	-	-	-	0	
6	-	-	-	-	-	0

$$\begin{aligned}
 DP[1][2] &= \min_{1 \leq k < 2} \{DP[1][k] + DP[k+1][2] + c_0 c_k c_2\} \\
 &= DP[1][1] + DP[2][2] + c_0 c_1 c_2 \\
 &= c_0 c_1 c_2
 \end{aligned}$$



## Esempio

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6
1	0					
2	-	0		●		
3	-	-	0			
4	-	-	-	0		
5	-	-	-	-	0	
6	-	-	-	-	-	0

$$\begin{aligned}
 DP[2][4] &= \min_{2 \leq k < 4} \{ DP[2][k] + DP[k+1][4] + c_1 c_k c_4 \} \\
 &= \min \{ DP[2][2] + DP[3][4] + c_1 c_2 c_4, \\
 &\quad DP[2][3] + DP[4][4] + c_1 c_3 c_4 \}
 \end{aligned}$$

## Esempio

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6
1	0					
2	-	0				
3	-	-	0			
4	-	-	-	0		
5	-	-	-	-	0	
6	-	-	-	-	-	0

$$\begin{aligned}
 DP[2][5] &= \min_{2 \leq k < 5} \{ DP[2][k] + DP[k+1][5] + c_1 c_k c_5 \} \\
 &= \min \{ DP[2][2] + DP[3][5] + c_1 c_2 c_5, \\
 &\quad DP[2][3] + DP[4][5] + c_1 c_3 c_5, \\
 &\quad DP[2][4] + DP[5][5] + c_1 c_4 c_5 \}
 \end{aligned}$$

## Esempio

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6
1	0				●	
2	-	0				
3	-	-	0			
4	-	-	-	0		
5	-	-	-	-	0	
6	-	-	-	-	-	0

$$\begin{aligned}
 DP[1][5] &= \min_{1 \leq k < 5} \{ DP[1][k] + DP[k+1][5] + c_0 c_k c_5 \} \\
 &= \min \{ DP[1][1] + DP[2][5] + c_0 c_1 c_5, \\
 &\quad DP[1][2] + DP[3][5] + c_0 c_2 c_5, \\
 &\quad DP[1][3] + DP[4][5] + c_0 c_3 c_5, \\
 &\quad DP[1][4] + DP[5][5] + c_0 c_4 c_5 \}
 \end{aligned}$$

## Esempio

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6
1	0					⊙
2	-	0				
3	-	-	0			
4	-	-	-	0		
5	-	-	-	-	0	
6	-	-	-	-	-	0

$$\begin{aligned}
 DP[1][6] &= \min_{1 \leq k < 6} \{ DP[1][k] + DP[k+1][6] + c_0 c_k c_6 \} \\
 &= \min \{ \\
 &\quad DP[1][1] + DP[2][6] + c_0 c_1 c_6, \\
 &\quad DP[1][2] + DP[3][6] + c_0 c_2 c_6, \\
 &\quad DP[1][3] + DP[4][6] + c_0 c_3 c_6, \\
 &\quad DP[1][4] + DP[5][6] + c_0 c_4 c_6, \\
 &\quad DP[1][5] + DP[6][6] + c_0 c_5 c_6 \}
 \end{aligned}$$

# Dalla formula al codice

## Input

- Un vettore  $c[0 \dots n]$  contenente le dimensioni delle matrici
  - $c[0]$  è il numero di righe della prima matrice
  - $c[i - 1]$  è il numero di righe della matrice  $A_i$
  - $c[i]$  è il numero di colonne della matrice  $A_i$
- Due indici  $i, j$  che rappresentano l'intervallo di matrici da moltiplicare

## Output

Il numero di moltiplicazioni scalari per calcolare il prodotto delle matrici comprese fra gli indici  $i$  e  $j$

## Approccio ricorsivo

---

```

int recPar(int[] c, int i, int j)


---


if i == j then
  | return 0
else
  | minSoFar =  $+\infty$ 
  | for int k = i to j - 1 do
  | | int val = recPar(c, i, k) + recPar(c, k + 1, j) + c[i - 1] · c[k] · c[j]
  | | if val < minSoFar then
  | | | minSoFar = minSoFar
  | return minSoFar

```

---

Complessità?

# Valutazione

## Alcune riflessioni

- La soluzione ricorsiva top-down è  $\Omega(2^n)$
- Non è poi migliore dell'approccio basato su forza bruta!
- Il problema è che molti sottoproblemi vengono risolti più volte
- Il numero di sottoproblemi è  $\frac{n(n+1)}{2}$

## Versione bottom-up

### Tabelle programmazione dinamica

Due matrici  $DP$ ,  $last$  di dimensione  $n \times n$  tali che:

- $DP[i][j]$  contiene il numero di moltiplicazioni scalari necessarie per moltiplicare le matrici  $A[i \dots j]$
- $last[i][j]$  contiene il valore  $k$  dell'ultimo prodotto che minimizza il costo per il sottoproblema



## Versione bottom-up

---

```

computePar(int[] c, int n)


---


int[][] DP = new int[1...n][1...n]
int[][] last = new int[1...n][1...n]
for i = 1 to n do                                     % Fill main diagonal
    DP[i][i] = 0
for h = 2 to n do                                     % h: diagonal index
    for i = 1 to n - h + 1 do                          % i: row
        int j = i + h - 1                             % j: column
        DP[i][j] = +∞
        for k = i to j - 1 do                          % k: last product
            int temp = DP[i][k] + DP[k + 1][j] + c[i - 1] · c[k] · c[j]
            if temp < DP[i][j] then
                DP[i][j] = temp
                last[i][j] = k
return DP[1][n]

```

<i>DP</i>	1	2	3	4	5	6
1	0	224	176	218	276	350
2		0	64	112	174	250
3			0	24	70	138
4				0	30	90
5					0	90
6						0

<i>i</i>	<i>c</i> [ <i>i</i> ]
0	7
1	8
2	4
3	2
4	3
5	5
6	6

$$\begin{aligned}
 DP[1][4] &= \min_{1 \leq k < 4} \{ DP[1][k] + DP[k+1][4] + c_0 \cdot c_k \cdot c_4 \} \\
 &= \min \left\{ \begin{array}{l} DP[1][1] + DP[2][4] + c_0 \cdot c_1 \cdot c_4, \\ DP[1][2] + DP[3][4] + c_0 \cdot c_2 \cdot c_4, \\ DP[1][3] + DP[4][4] + c_0 \cdot c_3 \cdot c_4 \end{array} \right\} \\
 &= \min \left\{ \begin{array}{l} 0 + 112 + 7 \cdot 8 \cdot 3, \\ 224 + 24 + 7 \cdot 4 \cdot 3, \\ 176 + 0 + 7 \cdot 2 \cdot 3 \end{array} \right\} \\
 &= \min \{ 280, 332, 218 \}
 \end{aligned}$$

<i>last</i>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
<b>1</b>	0	1	1	<b>3</b>	3	3
<b>2</b>		0	2	3	3	3
<b>3</b>			0	3	3	3
<b>4</b>				0	4	5
<b>5</b>					0	5
<b>6</b>						0

<i>i</i>	<i>c</i> [ <i>i</i> ]
0	7
1	8
2	4
3	2
4	3
5	5
6	6

$$\begin{aligned}
 DP[1][4] &= \min_{1 \leq k < 4} \{ DP[1][k] + DP[k+1][4] + c_0 \cdot c_k \cdot c_4 \} \\
 &= \min \left\{ \begin{array}{l} DP[1][1] + DP[2][4] + c_0 \cdot c_1 \cdot c_4, \\ DP[1][2] + DP[3][4] + c_0 \cdot c_2 \cdot c_4, \\ DP[1][3] + DP[4][4] + c_0 \cdot c_3 \cdot c_4 \end{array} \right\} \\
 &= \min \left\{ \begin{array}{l} 0 + 112 + 7 \cdot 8 \cdot 3, \\ 224 + 24 + 7 \cdot 4 \cdot 3, \\ 176 + 0 + 7 \cdot 2 \cdot 3 \end{array} \right\} \\
 &= \min \{ 280, 332, \mathbf{218} \}
 \end{aligned}$$

# Parentesizzazione ottima

## Considerazioni

- Il costo computazionale è  $O(n^3)$ , in quanto ogni cella richiede tempo  $O(n)$  per essere riempita
- Il costo della funzione si trova nella posizione  $DP[1][n]$
- È anche necessario mostrare la soluzione trovata
- Per questo motivo abbiamo registrato informazioni sulla soluzione nella matrice *last*

## Ricostruzione della soluzione – Stampa

---

```
computePar(int[] c, int n)
```

---

```
[...]
```

```
printPar(last, 1, n)
```

---



---

```
printPar(int[][] last, int i, int j)
```

---

```
if i == j then
```

```
  | print "A["; print i; print "]"
```

```
else
```

```
  | print "("; stampaPar(last, i, last[i][j]); print ".";
  | stampaPar(last, last[i][j] + 1, j); print ")"
```

---

## Ricostruzione della soluzione – Calcolo effettivo

---

```
int[][] multiply(matrix[] A, int[][] last, int i, int j)
```

---

```
if i == j then
```

```
  | return A[i]
```

```
else
```

```
  | int[][] X = multiply(A, last, i, last[i][j])
```

```
  | int[][] Y = multiply(A, last, last[i][j] + 1, j)
```

```
  | return matrix-multiplication(X, Y)
```

---

## Esempio

$$A[1\dots 6] = A[1\dots 3] \cdot A[4\dots 6]$$

$$A[1\dots 3] = A_1 \cdot A[2\dots 3]$$

$$A[4\dots 6] = A[4\dots 5] \cdot A_6$$

$$A[2\dots 3] = A_2 \cdot A_3$$

$$A[4\dots 5] = A_4 \cdot A_5$$

<i>last</i>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
<b>1</b>	0	1	1	3	3	3
<b>2</b>		0	2	3	3	3
<b>3</b>			0	3	3	3
<b>4</b>				0	4	5
<b>5</b>					0	5
<b>6</b>						0

## Risultato finale

$$A = ((A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3)) \cdot ((A_4 \cdot A_5) \cdot A_6))$$

## Prodotto di catena di matrici

### Take-home message – prendi e porta a casa

A volte, bisogna fare attenzione a come riempire la tabella - non è detto che riempire una riga dopo l'altra sia possibile.



# Insieme indipendente di intervalli pesati – Introduzione

## Input

Siano dati  $n$  intervalli distinti  $[a_1, b_1[, \dots, [a_n, b_n[$  della retta reale, aperti a destra, dove all'intervallo  $i$  è associato un profitto  $w_i, 1 \leq i \leq n$ .

## Intervalli disgiunti

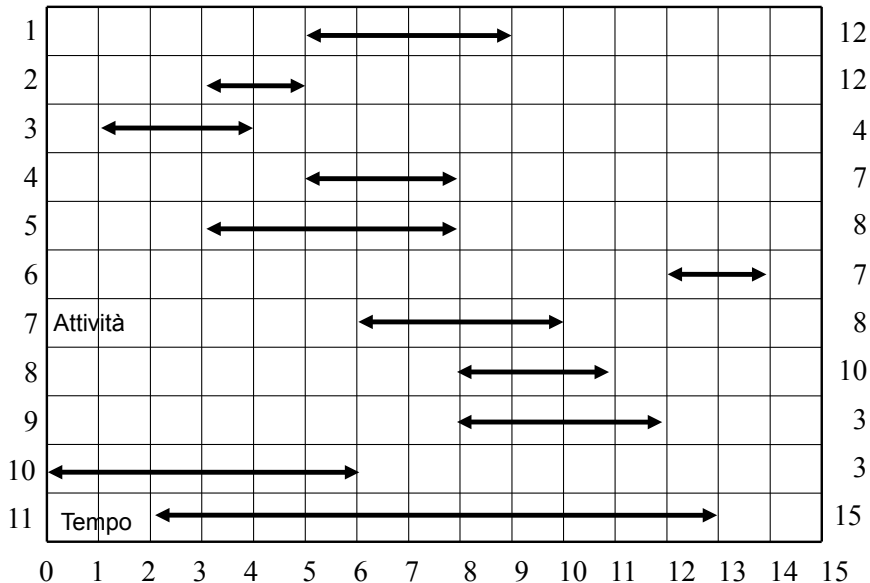
Due intervalli  $i$  e  $j$  si dicono **disgiunti** se:  $b_j \leq a_i$  oppure  $b_i \leq a_j$

## Problema

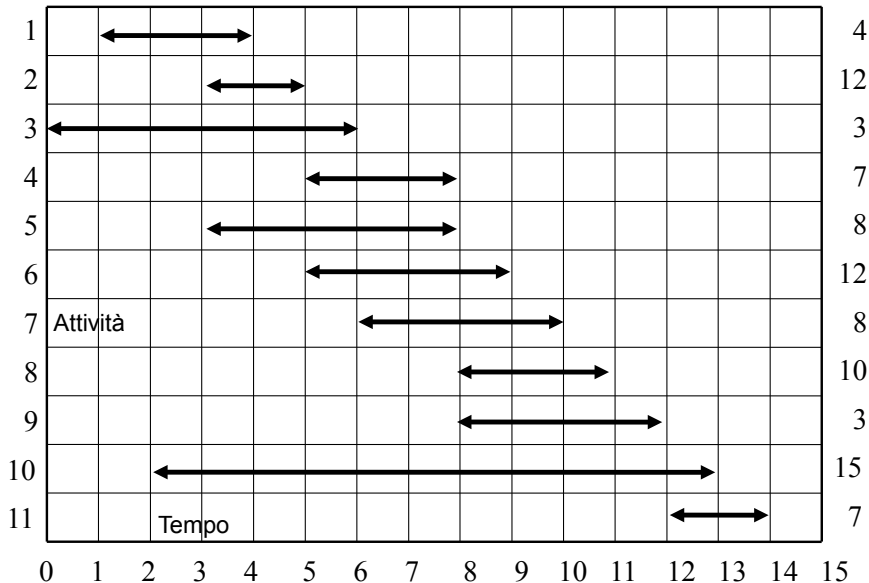
Trovare un **insieme indipendente di peso massimo**, ovvero un sottoinsieme di intervalli disgiunti tra loro tale che la somma dei loro profitti sia la più grande possibile.

- Esempio: prenotazione di una sala conferenza

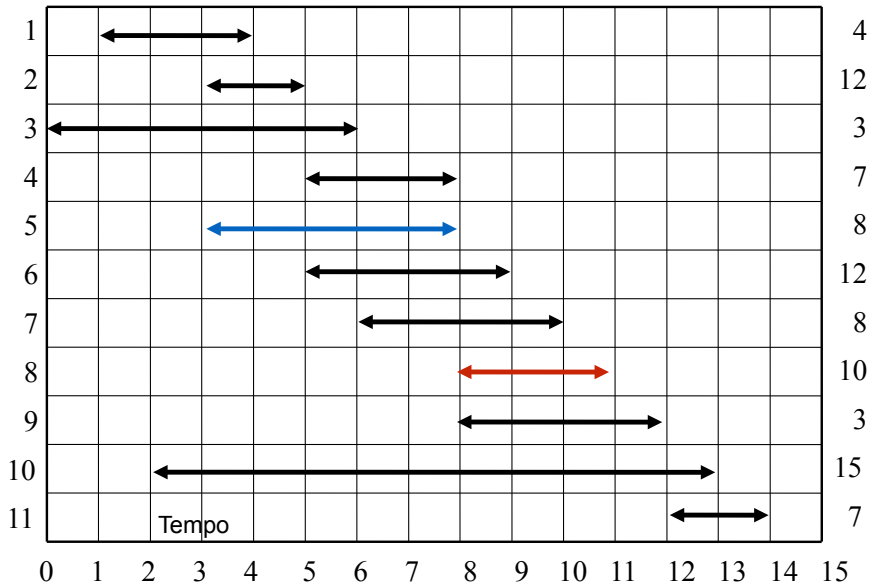
## Esempio



## Esempio – Ordinamento per estremi di fine non-decrescenti



## Esempio – Ordinato per estremi di fine non-decrescenti



## Pre-elaborazione

Per usare PD, è necessario effettuare una pre-elaborazione: ordinare gli intervalli per estremi finali non decrescenti

$$b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$$

### Profitto massimo (Versione 1)

$DP[i]$  contiene il profitto massimo ottenibile con i primi  $i$  intervalli

$$DP[i] = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ \max(DP[i-1], \max\{DP[j] + w_i : j < i \wedge b_j \leq a_i\}) & i > 0 \end{cases}$$

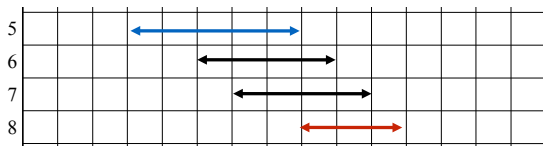
### Costo computazionale?

$$O(n^2)$$

## Pre-elaborazione

Una seconda possibile pre-elaborazione consiste nel pre-calcolare il predecessore  $pred_i = j$  di  $i$ , dove:

- $j < i$  è il massimo indice tale che  $b_j \leq a_i$
- se non esiste tale indice,  $pred_i = 0$ .



### Profitto massimo (Versione 2)

$$DP[i] = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ \max(DP[i-1], DP[pred_i] + w_i) & i > 0 \end{cases}$$

## Pre-elaborazione - calcolo predecessori

---

```
int[] computePredecessor(int[] a, int[] a, int n)
```

---

```
int[] pred = new int[0...n]
```

```
pred[0] = 0
```

```
for i = 1 to n do
```

```
  j = i - 1
```

```
  while j > 0 and b[j] > a[i] do
```

```
    j = j - 1
```

```
  pred[i] = j
```

```
return pred
```

---

Quanto costa pre-calcolare i predecessori?

$O(n^2)$

Si può fare meglio di così?

Sì!  $O(n \log n)$

## Alcune note

- Gli intervalli vanno ordinati per tempo non decrescente di fine
- Eventuali intervalli con lo stesso tempo di fine possono essere ordinati in qualunque modo
- Questo perché ogni valore  $DP[i]$  rappresenta il massimo profitto ottenibile con i primi  $i$  intervalli
- È quindi possibile escludere l'intervallo  $i$ -esimo se sceglierne uno precedente  $j$  (ma con lo stesso tempo di fine  $b[i] = b[j]$ ) ha un valore  $DP[j]$  più alto



## Versione completa

---

```

SET maxinterval(int[] a, int[] b, int[] w, int n)


---


{ ordina gli intervalli per estremi di fine crescenti }
int[] pred = computePredecessor(a, b, n)
int[] DP = new int[0...n]
DP[0] = 0
for i = 1 to n do
  | DP[i] = max(DP[i - 1], w[i] + DP[pred[i]])
i = n
SET S = Set()
while i > 0 do
  | if DP[i - 1] > w[i] + DP[pred[i]] then
  | | i = i - 1
  | else
  | | S.insert(i)
  | | i = pred[i]
return S

```

---

# Costo computazionale

## Costo computazionale

- Ordinamento intervalli:  $O(n \log n)$
- Calcolo predecessori:  $O(n \log n)$
- Riempimento tabella  $DP$ :  $O(n)$
- Ricostruzione soluzione:  $O(n)$
- Algoritmo completo:  $O(n \log n)$

## Esercizio

Scrivere una funzione di calcolo predecessori in tempo  $O(n \log n)$

# Insieme indipendente di intervalli pesati – Conclusioni

## Take-home message – prendi e porta a casa

Talvolta, può essere necessario pre-processare l'input per poter applicare nella maniera più efficiente la programmazione dinamica

# Per concludere

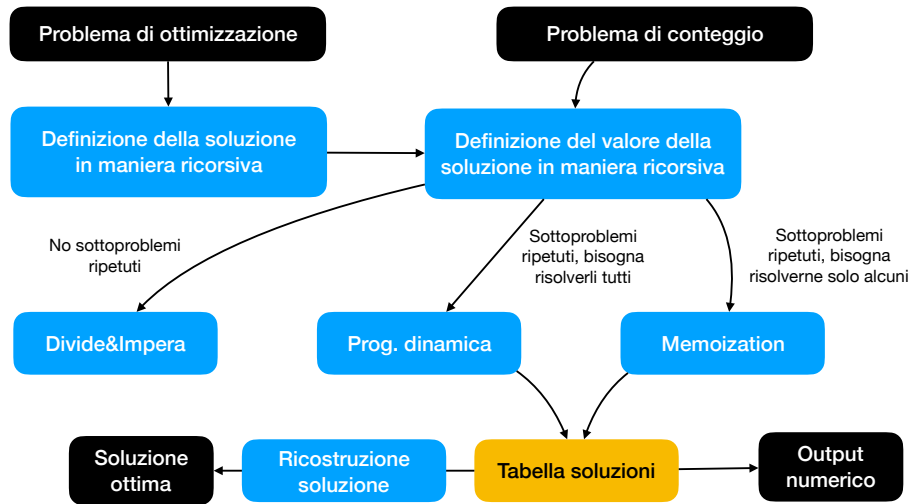
## Una lezione ancora più importante

La programmazione dinamica non è la soluzione di tutti i vostri problemi. Esistono altre tecniche che possono fare "meglio di così". Inoltre, è possibile che soluzioni ad-hoc possano essere migliori

## Esempi

- **Moltiplicazione di matrici**: esiste soluzione  $O(n \log n)$
- **Longest common subsequence**: può essere risolto in tempo  $O(mn / \log n)$  (con alfabeto limitato)
- **Four Russians algorithm**: tecnica generale che può essere applicata a vari problemi su matrice con alfabeto limitato  $O(n^2 / \log n)$ 
  - Edit distance
  - Transitive closure, ...

# Approccio generale



# Riassunto: programmazione dinamica / memoization

## Fasi

- Caratterizzare la **struttura** di una soluzione ottima
- Dimostrare che la soluzione gode di **sottostruttura ottima**
- Definire ricorsivamente il **valore** di una soluzione ottima
- Calcolare il **valore** di una soluzione ottima "bottom-up" (prog. dinamica) / "top-down" (memoization)
- **Ricostruzione** di una soluzione ottima