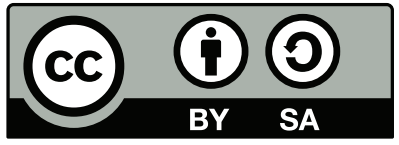
Algoritmi e Strutture Dati

Programmazione dinamica – Parte 1

Alberto Montresor

Università di Trento

2023/03/02



Sommario

Tecniche di soluzione problemi

- Divide-et-impera
- Programmazione dinamica / memoization
- Tecnica greedy
- Ricerca locale
- Backtrack
- Algoritmi probabilistici
- Tecniche di soluzione per problemi intrattabili

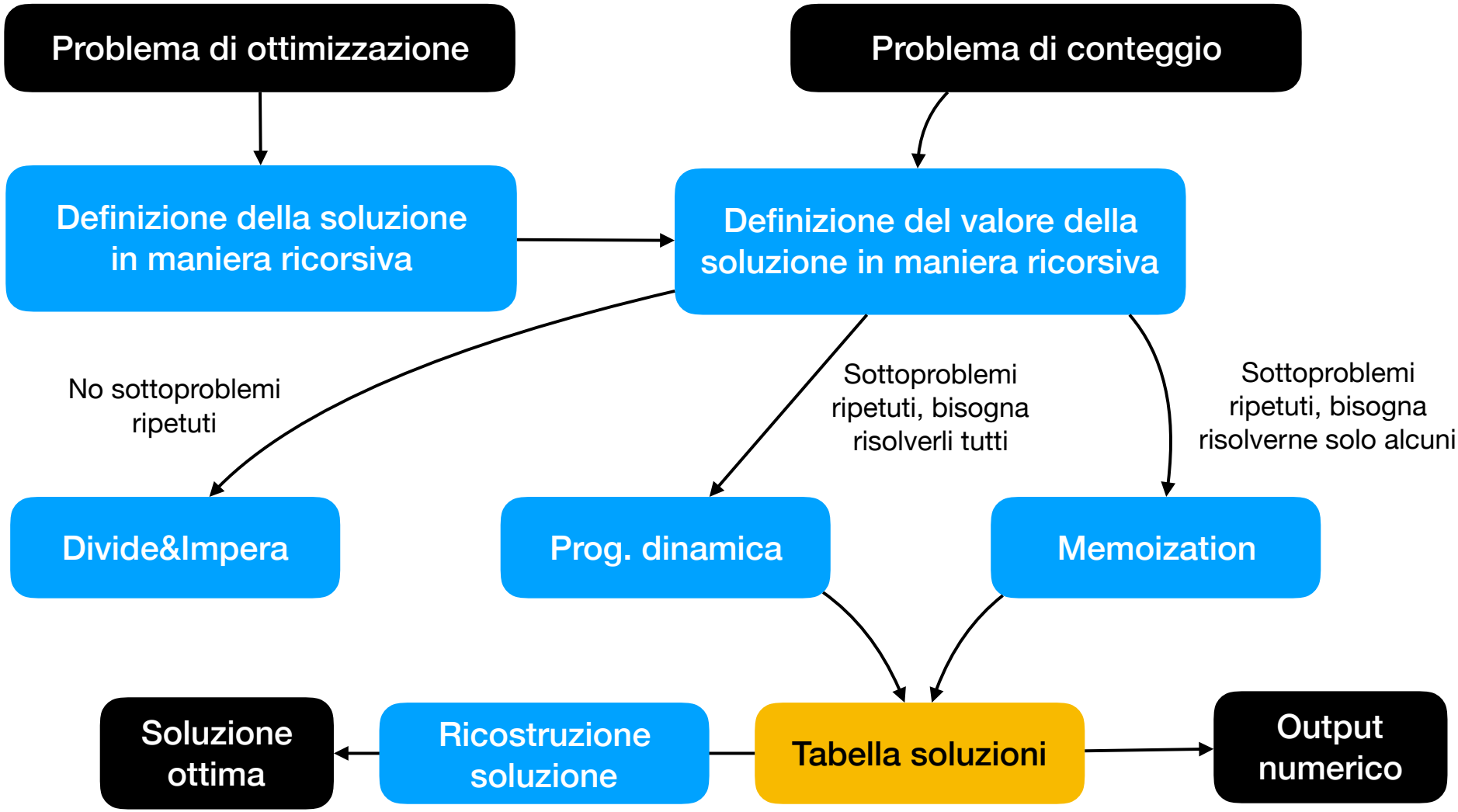
Programmazione dinamica in pillole

- Un metodo per spezzare un problema ricorsivamente in sottoproblemi
- Ogni sottoproblema viene risolto una volta sola
- La sua soluzione viene memorizzata in una tabella
- Nel caso un sottoproblema debba essere risolto nuovamente, si ottiene la sua soluzione dalla tabella
- La tabella è facilmente indirizzabile (lookup in $O(1)$)

Those who cannot remember the past are condemned to repeat it

George Santayana, 1905

Approccio generale



Un po' di storia

- Il termine Dynamic Programming è stato coniato da Richard Bellman agli inizi degli anni '50, nell'ambito dell'ottimizzazione matematica
- Inizialmente, si riferiva al processo di risolvere un problema compiendo le migliori decisioni una dopo l'altra.
- "Dynamic" doveva dare un senso "temporale"
- "Programming" si riferiva all'idea di creare "programmazioni ottime", per esempio nel campo della logistica

https://en.wikipedia.org/wiki/Dynamic_programming#History

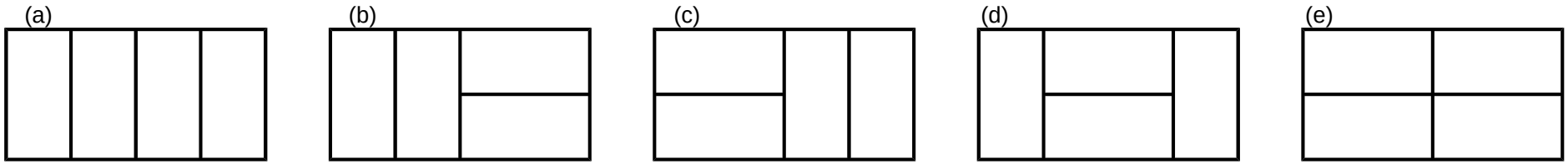
Problema 1 – Domino lineare

Definizione

Il gioco del domino è basato su tessere di dimensione 2×1. Scrivere un algoritmo efficiente che prenda in input un intero n e restituisca il numero di possibili disposizioni di n tessere in un rettangolo $2 \times n$.

Esempio

I casi (a)-(e) della figura rappresentano le cinque disposizioni possibili con cui è possibile riempire un rettangolo 2×4.



Domino

Quante disposizioni ci sono per $n = 7$?

Wooclap.com, codice: ZAEBFA

Hint: calcola quante disposizioni ci sono per $n = 0 \dots 7$

Come risolvereste il problema?

Domino

Definizione ricorrenza

Definiamo una formula ricorsiva $DP[n]$ che permetta di calcolare il numero di disposizioni possibili quando si hanno n tessere.

- Con $n = 0$, esiste una sola disposizione possibile (nessuna tessera)
- Con $n = 1$, esiste una sola disposizione possibile (tessera verticale)

$$DP[n] = \begin{cases} 1 & n \leq 1 \\ ? & n > 1 \end{cases}$$

Domino

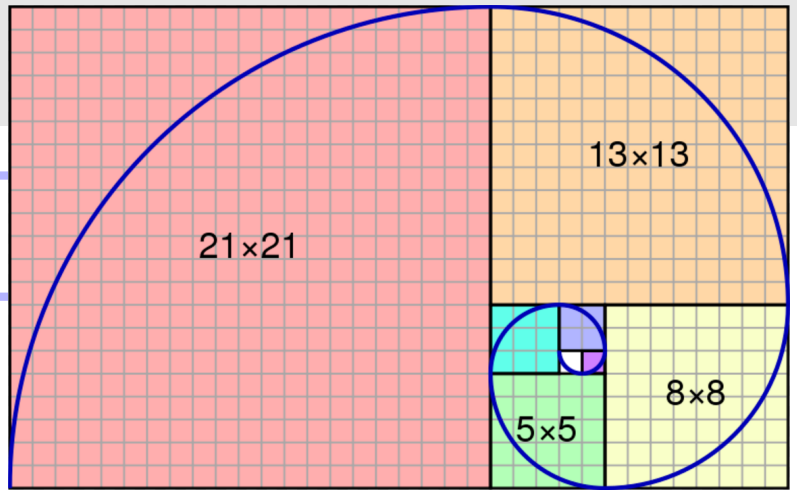
Definizione ricorrenza

Definiamo una formula ricorsiva $DP[n]$ che permetta di calcolare il numero di disposizioni possibili quando si hanno n tessere.

- Se metto una tessera in verticale, risolverò il problema di dimensione $n-1$
- Se metto una tessera in orizzontale, ne devo mettere due; risolverò il problema di dimensione $n-2$
- Queste due possibilità si sommano insieme (conteggio)

$$DP[n] = \begin{cases} 1 & n \leq 1 \\ DP[n-2] + DP[n-1] & n > 1 \end{cases}$$

Serie matematica



La serie generata è la seguente

```
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,
21, 34, 55, 89, ...
```

Successione di Fibonacci

$DP[n]$ è pari al $(n+1)$-esimo numero della serie di Fibonacci, introdotta da Leonardo Pisano detto il Fi'Bonacci (1175–1235).

- Definiti per descrivere la crescita di una popolazione di conigli (!)
- In natura: Pigne, conchiglie, parte centrale dei girasoli, etc.
- In informatica: Alberi AVL minimi, Heap di Fibonacci, etc.

Domino - Algoritmo ricorsivo

Algoritmo ricorsivo che risolve il problema Domino

```
int domino1(int n)
if n ≤ 1 then
    return 1
else
    return domino1(n − 1) + domino1(n − 2)
```

Qual è l'equazione di ricorrenza associata a domino1()?

Wooclap.com, codice: ZAEBFA

Complessità computazionale

Equazione di ricorrenza associata a domino1()

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n \leq 1 \\ T(n-1) + T(n-2) + 1 & n > 1 \end{cases}$$

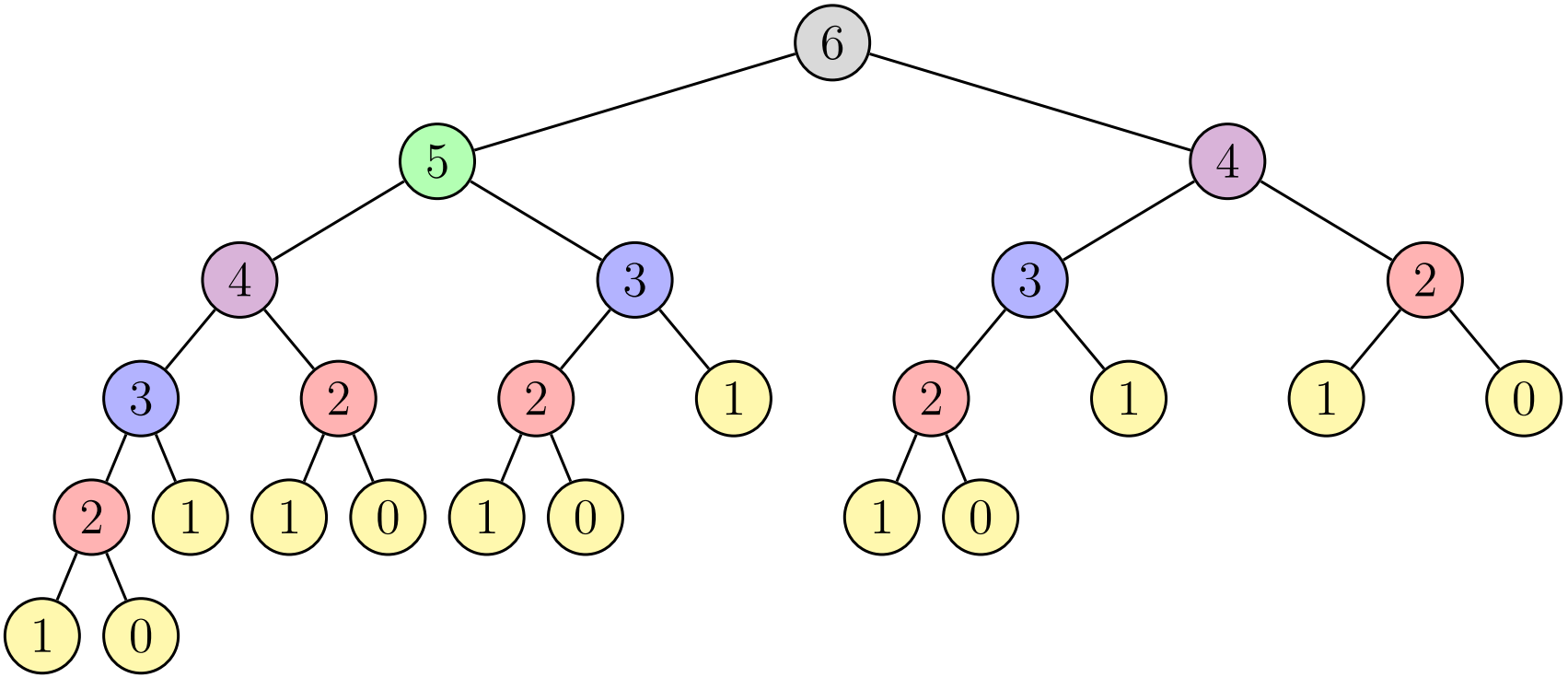
Qual è la complessità di domino1()?

Ricorrenza lineare di ordine costante:

- $a_1 = 1, a_2 = 1, a = a_1 + a_2 = 2, \beta = 0$
- Complessità: $\Theta(a^n \cdot n^\beta)$

$$T(n) = \Theta(2^n)$$

Albero di ricorsione di domino1()



Molti sotto-problemi ripetuti!

Come evitare di risolvere un problema più di una volta

Tabella DP

- Memorizziamo il risultato ottenuto risolvendo un particolare problema in una tabella *DP* (vettore, matrice, dizionario)
- La tabella deve contenere un elemento per ogni sottoproblema che dobbiamo risolvere

Casi base

- Memorizziamo i casi base direttamente nelle posizioni relative

Iterazione bottom-up

- Si parte dai problemi risolubili come basi base
- Si sale verso problemi via via più grandi ...
- ... fino a raggiungere il problema originale

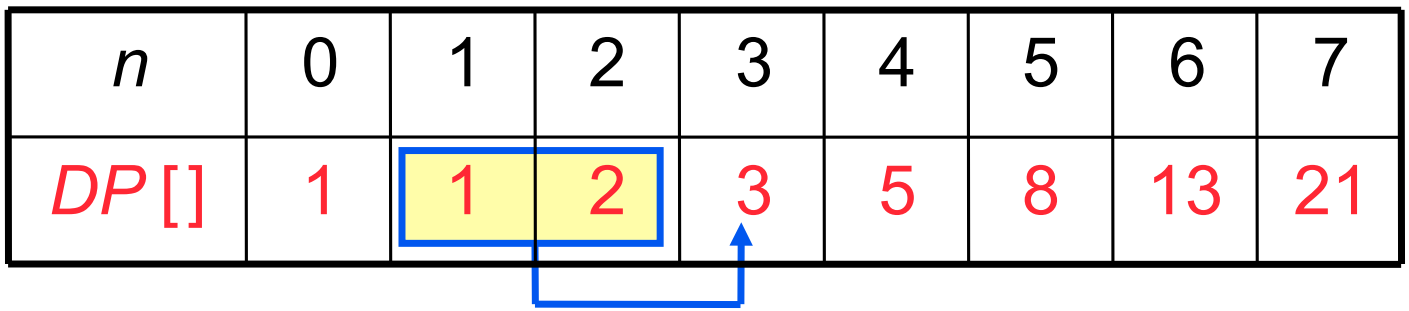
Domino: algoritmo iterativo

Algoritmo iterativo che risolve il problema Domino

int domino2(**int** n)

$DP = \textbf{new int}[0 \ldots n]$
$DP[0] = DP[1] = 1$
for $i = 2$ **to** n **do**
  $DP[i] = DP[i-1] + DP[i-2]$
return $DP[n]$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$DP[]$	1	1	2	3	5	8	13	21



Domino

int domino2(**int** n)

$DP = \textbf{new int}[0 \ldots n]$
$DP[0] = DP[1] = 1$
for $i = 2$ **to** n **do**
  $DP[i] = DP[i-1] + DP[i-2]$
return $DP[n]$

Qual è la complessità in tempo di domino2(n)?

$T(n) = \Theta(n)$

Qual è la complessità in spazio di domino2(n)?

$S(n) = \Theta(n)$

Possiamo fare "meglio di così"?

Possiamo ridurre lo spazio utilizzato

Domino

int domino3(**int** n)

int $DP_0 = 1$
int $DP_1 = 1$
int $DP_2 = 1$
for $i = 2$ **to** n **do**
    $DP_0 = DP_1$
    $DP_1 = DP_2$
    $DP_2 = DP_0 + DP_1$
return DP_2

n	0	1	2	3	4	5	6	7
DP_0	-	-	1	1	2	3	5	8
DP_1	1	1	1	2	3	5	8	13
DP_2	1	1	2	3	5	8	13	21

Qual è la complessità in spazio di domino3(n)?

$S(n) = \Theta(1)$

Ripasso sulla complessità computazionale

Siete sicuri che i calcoli sulla complessità siano corretti?

Osservate di nuovo la serie generata

`1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...`

Quanti bit sono necessari per memorizzare $F(n)$?

Modello costo uniforme vs modello costo logaritmico

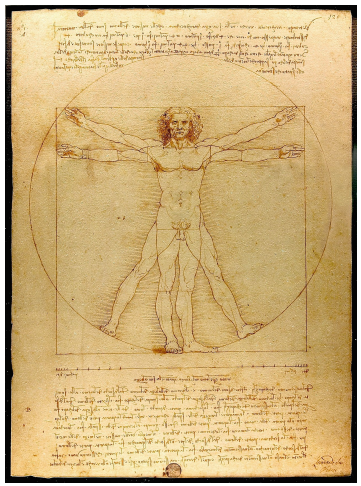
Formula di Binet per i numeri di Fibonacci

$$DP[n-1] = F(n) = \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} - \frac{(1-\phi)^n}{\sqrt{5}}$$

dove ϕ è la sezione aurea:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887\ldots$$

$$\frac{1}{\phi} = \phi - 1 = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = 0{,}6180339887\ldots$$



Quanti bit sono richiesti per memorizzare $F(n)$?

$\log F(n) = \Theta(n)$

Quanto costa sommare due numeri di Fibonacci consecutivi?

Modello costo uniforme vs modello costo logaritmico

Nel modello di costo logaritmico, le tre versioni hanno complessità:

Funzione	**Complessità (Tempo)**	**Complessità (Spazio)**
domino1()	$O(n2^n)$	$O(n^2)$
domino2()	$O(n^2)$	$O(n^2)$
domino3()	$O(n^2)$	$O(n)$

Se siete curiosi, si può risolvere il problema in tempo $O(n \log n)$ utilizzando l'esponenziazione di matrici basata su quadrati o un algoritmo che sfrutta una proprietà dei numeri di Fibonacci:

https://jeffe.cs.illinois.edu/teaching/algorithms/book/03-dynprog.pdf

Hateville

- Hateville è un villaggio particolare, composto da n case, numerate da 1 a n lungo una singola strada.
- Ad Hateville ognuno odia i propri vicini della porta accanto, da entrambi i lati.
- Quindi, il vicino i odia i vicini $i-1$ e $i+1$ (se esistenti).
- Hateville vuole organizzare una sagra e vi ha affidato il compito di raccogliere i fondi.
- Ogni abitante i ha intenzione di donare una quantità $D[i]$, ma non intende partecipare ad una raccolta fondi a cui partecipano uno o entrambi i propri vicini.

Hateville

Problemi

- Scrivere un algoritmo che dato il vettore D, restituisca la quantità massima di fondi che può essere raccolta
- Bonus: restituire un sottoinsieme di indici $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ tale che il totale dei fondi raccolti $T = \sum_{i \in S} D[i]$ sia massimale

Qual è la donazione massima con $D = [4, 3, 6, 5, 8, 7]$?

Wooclap.com, codice: ZAEBFA

Come risolvereste il problema?

Hateville

Problemi

- Scrivere un algoritmo che dato il vettore D, restituisca la quantità massima di fondi che può essere raccolta
- Bonus: restituire un sottoinsieme di indici $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ tale che il totale dei fondi raccolti $T = \sum_{i \in S} D[i]$ sia massimale

La vostra soluzione funziona con questo esempio?

- Vettore donazioni: $\mathsf{D} = [10, 5, 5, 10]$
- Raccolta fondi massima: 20
- Insieme indici: $\{1, 4\}$

Definizione ricorsiva

Definizione ricorrenza

È possibile definire una formula ricorsiva che permetta di calcolare il sottoinsieme di case che, se selezionate, dà origine alla maggior quantità di donazioni?

Ri-definiamo il problema

- Sia $HV(i)$ uno dei possibili insiemi di indici da selezionare per ottenere una donazione ottimale dalle prime i case di Hateville, numerate $1 \dots n$
- $HV(n)$ è la soluzione del problema originale

Passo ricorsivo

Considerate il vicino i-esimo

- Cosa succede se non accetto la sua donazione?

$$HV(i) = HV(i-1)$$

- Cosa succede se accetto la sua donazione?

$$HV(i) = \{i\} \cup HV(i-2)$$

- Come faccio a decidere se accettare o meno?

$$HV(i) = highest(HV(i-1), \{i\} \cup HV(i-2))$$

Sottostruttura ottima

Vi ho convinti?

$$HV(i) = highest(HV(i-1), \{i\} \cup HV(i-2))$$

Teorema: Sottostruttura ottima

- Sia P_i il problema dato dalle prime i case
- Sia S_i una soluzione ottima per il problema P_i
- Ne consegue:
  - Se $i \notin S_i$, allora $S_i = S_{i-1}$
  - Se $i \in S_i$, allora $S_i = S_{i-2} \cup \{i\}$

Sottostruttura ottima – Dimostrazione

- Sia P_i il problema dato dalle prime i case
- Sia S_i una soluzione ottima per il problema P_i
- Sia $||S|| = \sum_{k \in S} D[k]$ il totale di donazioni di un insieme S

Caso 1: $i \notin S_i$

- S_i è una soluzione ottima anche per P_{i-1}
- Se così non fosse, esisterebbe una soluzione S'_{i-1} per il problema P_{i-1} tale che $||S'_{i-1}|| > ||S_i||$
- Ma allora S'_{i-1} sarebbe una soluzione anche per P_i tale che $||S'_{i-1}|| > ||S_i||$, assurdo

Sottostruttura ottima – Dimostrazione

- Sia P_i il problema dato dalle prime i case
- Sia S_i una soluzione ottima per il problema P_i
- Sia $||S|| = \sum_{k \in S} D[k]$ il totale di donazioni di un insieme S

Caso 2: $i \in S_i$

- $i - 1 \notin S_i$, altrimenti non sarebbe una soluzione ammissibile
- Quindi, $S_i - \{i\}$ è una soluzione ottima per P_{i-2}
- Se così non fosse, esisterebbe una soluzione S'_{i-2} per il problema P_{i-2} tale che $||S'_{i-2}|| > ||S_i - \{i\}||$
- Ma allora $S'_{i-2} \cup \{i\}$ sarebbe una soluzione per P_i tale che $||S'_{i-2} \cup \{i\}|| > ||S_i||$, assurdo

Completare la ricorsione

Quali sono i casi base?

- $HV(0) = \emptyset$
- $HV(1) = \{1\}$

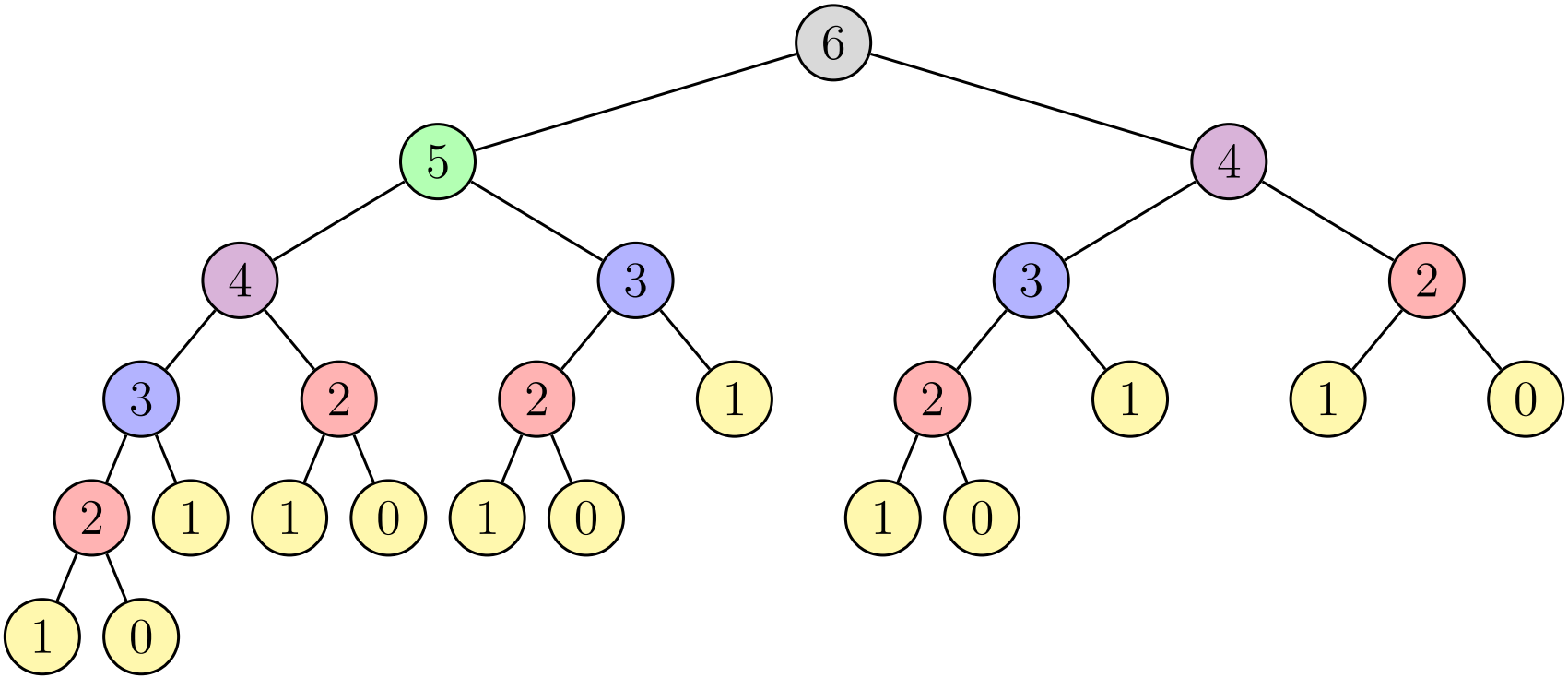
Tutto insieme!

$$HV(i) = \begin{cases} \emptyset & i = 0 \\ \{1\} & i = 1 \\ highest(HV(i-1), HV(i-2) \cup \{i\}) & i \geq 2 \end{cases}$$

Algoritmo ricorsivo

Domanda

Vale la pena scrivere un algoritmo ricorsivo, basato su divide-et-impera, per risolvere il problema di Hateville?



Memorizzare una tabella

Esempi

i	0	1	2	3	4	5	6	7
D		10	5	5	8	4	7	12
HV	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,3\}$	$\{1,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{1,4,6\}$	$\{1,3,5,7\}$

i	0	1	2	3	4	5	6	7
D		10	1	1	10	1	1	10
HV	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,3\}$	$\{1,4\}$	$\{1,4\}$	$\{1,4,6\}$	$\{1,4,7\}$

Problemi

- Dobbiamo definire la funzione *highest*()
- Memorizzare gli insiemi nella tabella è costoso

Tabella DP

Valore della soluzione ottima

- Sia $DP[i]$ il valore della massima quantità di donazioni che possiamo ottenere dalle prime i case di Hateville.
- $DP[n]$ è il valore della soluzione ottima

$$DP[i] = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ D[1] & i = 1 \\ \max(DP[i-1], DP[i-2] + D[i]) & i \geq 2 \end{cases}$$

Hateville: Algoritmo iterativo

Algoritmo iterativo che risolve il problema Hateville

---

int hateville(**int**[ ] D, **int** n)

---

int[ ] DP = **new int**$[0 \ldots n]$
$DP[0] = 0$
$DP[1] = D[1]$
for $i = 2$ **to** n **do**
  $DP[i] = \max(DP[i-1], DP[i-2] + D[i])$
return $DP[n]$

Sulla risoluzione con "veri" linguaggi di programmazione

Java

```java
public int hateville(int[] D, int n) {
  int[] DP = new int[n+1];
  DP[0] = 0;
  DP[1] = D[0];
  for (int i=2; i <= n; i++) {
    DP[i] = max(DP[i-1],DP[i-2]+D[i-1]);
  }
  return DP[n];
}
```

Python

```python
def hateville(D):
  DP = [ 0, D[0] ]
  for i in range(1,len(D)):
    DP.append( max(DP[-1], DP[-2] + D[i]) )
  return DP[-1]
```

Memorizzare una tabella

Esempi

i	0	1	2	3	4	5	6	7
D		10	5	5	8	4	7	12
DP	0	10	10	15	18	19	25	31

i	0	1	2	3	4	5	6	7
D		10	1	1	10	1	1	10
DP	0	10	10	11	20	20	21	30

Problema

Abbiamo il valore della soluzione massimale, ma non abbiamo la soluzione!

Ricostruire la soluzione originale

Si guarda l'elemento $DP[i]$. Da cosa deriva il suo valore?

- Se $DP[i] = DP[i-1]$, la casa i non è stata selezionata
- Se $DP[i] = DP[i-2] + D[i]$, la casa i è stata selezionata
- Se entrambe le equazioni sono vere, una vale l'altra!

Per ricostruire la soluzione fino ad i, lavoriamo in modo ricorsivo:

- Se $DP[i] = DP[i-1]$, si prende la soluzione fino a $i-1$ senza aggiungere nulla
- Altrimenti, si prende la soluzione fino a $i-2$ e si aggiunge i

Ricostruire la soluzione originale

```
SET solution(int[] DP, int[] D, int i)
if i == 0 then
    return ∅
else if i == 1 then
    return {1}
else if DP[i] == DP[i − 1] then
    return solution(DP, D, i − 1)
else
    SET sol = solution(DP, D, i − 2)
    sol.insert(i)
    return sol
```

```
SET hateville(int[] D, int n)
[...]
return solution(DP, D, n)
```

Note: per come è stato costruito il codice, D non è necessario

Complessità computazionale

Qual è la complessità computazionale di solution()?

$T(n) = \Theta(n)$

Qual è la complessità computazionale e spaziale di hateville()?

$T(n) = \Theta(n)$ $\quad$ $S(n) = \Theta(n)$

È possibile migliorare la complessità spaziale di hateville()?

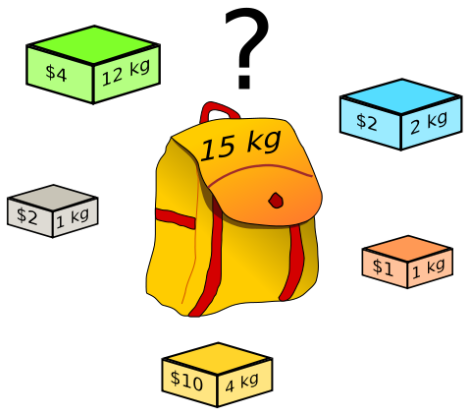
No, se vogliamo ricostruire la soluzione.

Zaino (Knapsack)

Descrizione del problema

Dato un insieme di oggetti, ognuno caratterizzato da un peso e un profitto, e uno "zaino" con un limite di capacità, individuare un sottoinsieme di oggetti

- il cui peso sia inferiore alla capacità dello zaino;
- il valore totale degli oggetti sia massimale, i.e. più alto o uguale al valore di qualunque altro sottoinsieme di oggetti



https://en.wikipedia.org/wiki/Knapsack_problem#/media/File:Knapsack.svg

Un po' di storia

- Problemi simili allo zaino erano trattati già intorno al 1896 (G. Mathews. *On the partition of numbers.* Proceedings of the London Mathematical Society, 1(1):486–490, 1896)
- Il nome Knapsack è stato introdotto da Dantzig nel 1957. (George B. Dantzig. *Discrete-variable extremum problems.* Operations research, 5(2):266–288, 1957)

less than 128. By continuing in this manner, we can eventually arrive at a situation where it is not possible to find any directed link which leads to an improvement of the distance shown in any circle. If so, we have arrived at an optimal solution. For the example at hand, the optimal tree is the same as that shown in Fig. 2 except that the arrow from Washington to Boston is dropped and one from Chicago to Boston is inserted. The 191 at Boston is changed to 186. The values of the x_{ij} are unity along the path in the final tree from Los Angeles to Boston and are zero elsewhere. Hence the optimal path is from Los Angeles to Salt Lake City, then to Chicago, and finally to Boston.

5. THE KNAPSACK PROBLEM

In certain types of problems, we can get extreme-point solutions for which not all the values of the x_{ij} are either zero or one. When any of the x_{ij} have fractional values, the corresponding extreme points are referred to as fractional extreme points. Now an example of this occurs in the knapsack problem. In this problem a person is planning a hike and has decided not to carry more than 70 lb of different items, such as bed roll, geiger counters (these days), cans of food, etc.

We try to formulate this is mathematical terms. Let a_j be the weight of the j^{th} object and let b_j be its relative value determined by the hiker in comparison with the values of the other objects he would like to have on his trip.

Zaino (Knapsack)

Input

- Vettore w, dove $w[i]$ è il peso (weight) dell'oggetto i-esimo
- Vettore p, dove $p[i]$ è il profitto (profit) dell'oggetto i-esimo
- La capacità C dello zaino

Output

Un insieme $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ tale che:

Il peso totale deve essere minore o uguale alla capacità

$$w(S) = \sum_{i \in S} w[i] \leq C$$

Il profitto totale deve essere massimizzato

$$\text{argmax}_S \; p(S) = \sum_{i \in S} p[i]$$

Esempi

Qual è il valore massimo per questo zaino, con $C = 12$?

Item id	**1**	**2**	**3**	**4**
Weight	12	4	6	2
Profit	26	8	12	4

wooclap.com, codice: ZAEBFA

Come risolvereste il problema?

Il vostro algoritmo funziona per questo esempio, con $C = 12$?

Item id	**1**	**2**	**3**	**4**
Weight	12	4	6	2
Profit	26	9	13	5

$S = \{2, 3, 4\}$

Definizione matematica del valore della soluzione

Valore della soluzione

Dato uno zaino di capacità C e n oggetti caratterizzati da peso w e profitto p, definiamo $DP[i][c]$ come il massimo profitto che può essere ottenuto dai primi $i \leq n$ oggetti contenuti in uno zaino di capacità $c \leq C$.

Problema originale

Il massimo profitto ottenibile dal problema originale è rappresentato da $DP[n][C]$).

Parte ricorsiva

Considerate l'ultimo oggetto

Cosa succede se non lo prendete?	$DP[i][c] = DP[i-1][c]$	La capacità non cambia, non c'è profitto
Cosa succede se lo prendete?	$DP[i][c] = DP[i-1][c-w[i]] + p[i]$	Sottraete il peso dalla capacità e aggiungete il profitto relativo

Come scegliere la soluzione migliore?

$$DP[i][c] = \max(\overbrace{DP[i-1][c-w[i]] + p[i]}^{\text{Preso}}, \overbrace{DP[i-1][c]}^{\text{Non preso}})$$

Casi base

Quali sono i casi base?

- Qual è il profitto massimo se non avete più oggetti?
- Qual è il profitto massimo se non avete più capacità?
- Cosa succede se la capacità è negativa?

$$DP[i][c] = \begin{cases} 0 & i = 0 \textbf{ or } c = 0 \\ -\infty & c < 0 \end{cases}$$

Formula completa

$$DP[i][c] = \begin{cases} 0 & i = 0 \textbf{ or } c = 0 \\ -\infty & c < 0 \\ \max(DP[i-1][c-w[i]] + p[i], DP[i-1][c]) & \text{otherwise} \end{cases}$$

Come trasformare questa formula in un algoritmo?

Zaino

int knapsack(**int**[ ] w, **int**[ ] p, **int** n, **int** C)

$DP =$ **new int**$[0 \ldots n][0 \ldots C]$
for $i = 0$ **to** n **do**
  $DP[i][0] = 0$
for $c = 0$ **to** C **do**
  $DP[0][c] = 0$
for $i = 1$ **to** n **do**
  for $c = 1$ **to** C **do**
    if $w[i] \leq c$ **then**
      $DP[i][c] = \max(\overbrace{DP[i-1][c-w[i]] + p[i]}^{\text{Preso}}, \overbrace{DP[i-1][c]}^{\text{Non preso}})$
    else
      $DP[i][c] = \overbrace{DP[i-1][c]}^{\text{Non preso}}$
return $DP[n][C]$

Esempio

```
w = [ 4, 2, 3, 4]
p = [10, 7, 8, 6]
C = 9
```

	c									
i	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	10	10	10	10	10	10
2	0	0	7	7	10	10	17	17	17	17
3	0	0	7	8	10	15	17	18	18	25
4	0	0	7	8	10	15	17	18	18	25

Complessità computazionale

Qual è la complessità della funzione knapsack()?

$$T(n) = O(nC)$$

È un algoritmo polinomiale?

No, è un algoritmo pseudo-polinomiale, perchè sono necessari $k = \lceil \log C \rceil$ bit per rappresentare C e quindi la complessità è:

$$T(n) = O(n2^k)$$

Reality check

Sebbene il problema di base sia molto semplice, assieme alle sue varianti può essere utilizzato in una miriade di applicazioni.

- Taglio dei materiali (con estensioni nel campo 2D-3D)
- Logistica
- Selezione di portfolio di investimenti
- Selezione di reti cellari per nodi mobili
- Campionamento adattivo a densità variabile
- ....