Analisi – Algoritmo di selezione deterministico

Si consideri la seguente equazione di ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} T(\lfloor n/5 \rfloor) + T(\lfloor 7n/10 \rfloor) + \frac{11}{5}n & n > 1 \\ 1 & n \leq 1 \end{cases}$$

Individuare limiti inferiori e superiori tramite il metodo di sostituzione.

Ricorrenza $2T(n/8) + 2T(n/4) + n$

Trovare un limite asintotico superiore e un limite asintotico inferiore alla seguente ricorrenza, facendo uso del metodo di sostituzione:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n \leq 1 \\ 2T(n/8) + 2T(n/4) + n & n > 1 \end{cases}$$

Crazy

Trovare un limite superiore e inferiore al costo computazionale del seguente algoritmo, dando una dimostrazione formale.

```
int crazy(int n)
-----------------
if n ≤ 1 then
    return n · n
else
    int b = 1
    for i = 1 to n do
        for j = i to n do
            b = (b + i * j) mod 1007
    return b + crazy(⌊n/4⌋) + crazy(⌊n/2⌋) + crazy(⌊n/4⌋)
```

Spoiler alert!

Analisi – Algoritmo di selezione deterministico

- Funzione: $T(n) = T(\lfloor n/5 \rfloor) + T(\lfloor 7n/10 \rfloor) + 11/5\ n$
- Ipotesi: $T(n) = \Theta(n)$
- Limite superiore: $\exists c > 0, \exists m > 0 : T(n) \leq cn, \forall n \geq m$

Caso base

$$
\begin{aligned}
T(0) &= 1 \leq c \cdot 0 \Leftrightarrow 1 \leq 0 \qquad \text{Falso!} \\
T(1) &= 1 \leq c \cdot 1 \Leftrightarrow c \geq 1 \\
T(2) &= 22/5 + T(\lfloor 2/5 \rfloor) + T(\lfloor 14/10 \rfloor) \\
&= 22/5 + T(0) + T(1) = 32/5 \leq c \cdot 2 \Leftrightarrow c \geq 32/10 \\
T(3) &= 33/5 + T(\lfloor 3/5 \rfloor) + T(\lfloor 21/10 \rfloor) \\
&= 33/5 + T(0) + T(2) = 70/5 \leq c \cdot 3 \Leftrightarrow c \geq 70/15 \\
T(4) &= 44/5 + T(\lfloor 4/5 \rfloor) + T(\lfloor 28/10 \rfloor) \\
&= 44/5 + T(0) + T(2) = 81/5 \leq c \cdot 4 \Leftrightarrow c \geq 81/20 \\
T(5) &= 55/5 + T(\lfloor 5/5 \rfloor) + T(\lfloor 35/10 \rfloor) = 55/5 + T(1) + T(3)
\end{aligned}
$$

Analisi – Algoritmo di selezione deterministico

- Funzione: $T(n) = T(\lfloor n/5 \rfloor) + T(\lfloor 7n/10 \rfloor) + 11/5\ n$
- Ipotesi: $T(n) = \Theta(n)$
- Limite superiore: $\exists c > 0, \exists m \geq 0 : T(n) \leq cn, \forall n \geq m$

Passo ricorsivo

$$
\begin{aligned}
T(n) &\leq c\,\lfloor n/5 \rfloor + c\,\lfloor 7n/10 \rfloor + 11/5\ n \\
&\leq 1/5\ cn + 7/10\ cn + 11/5\ n \\
&= 9/10\ cn + 22/10\ n \leq cn
\end{aligned}
$$

- L'ultima disequazione è vera per $c \geq 22$, quindi $T(n) = O(n)$
- $T(n) = \Omega(n)$ per la componente non ricorsiva

Ricorrenza $2T(n/8) + 2T(n/4) + n$

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n \leq 1 \\ 2T(n/8) + 2T(n/4) + n & n > 1 \end{cases}$$

È facile dimostrare che ovviamente, la funzione $T(n)$ è $\Omega(n)$; infatti,

$$T(n) = 2T(n/8) + 2T(n/4) + n \geq n \geq c_1 n$$

per $c_1 \leq 1$. Non è necessario dimostrare il caso base, perché abbiamo rimosso gli elementi ricorsivi e quindi non abbiamo bisogno di induzione.

Ricorrenza $2T(n/8) + 2T(n/4) + n$

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n \leq 1 \\ 2T(n/8) + 2T(n/4) + n & n > 1 \end{cases}$$

Una prima osservazione che si potrebbe fare per “indovinare” un limite superiore è la seguente:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/8) + 2T(n/4) + n \\ &\leq 2T(n/4) + 2T(n/4) + n \\ &\leq 4T(n/4) + n \end{aligned}$$

In base a questo risultato, il master theorem dice che $T(n) = O(n \log n)$.

Ricorrenza $2T(n/8) + 2T(n/4) + n$

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n \leq 1 \\ 2T(n/8) + 2T(n/4) + n & n > 1 \end{cases}$$

A questo punto, non ci resta che vedere quale dei due risultati ($\Omega(n)$ e $O(n \log n)$) è stretto. Proviamo con $O(n)$.
Ipotesi induttiva: $\forall k < n : T(k) \leq ck$. Proviamo che il risultato è valido anche per n.

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/8) + 2T(n/4) + n \\ &\leq 2cn/8 + 2cn/4 + n \\ &= 3/4cn + n \\ &\leq cn \end{aligned}$$

L'ultima disequazione è vera se $3/4c + 1 \leq c$, ovvero se $c \geq 4$.

Crazy

L'equazione di ricorrenza della funzione crazy() è la seguente:

$$T(n) = \begin{cases} 2T(\lfloor n/4 \rfloor) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n^2 & n > 1 \\ 1 & n \leq 1 \end{cases}$$

E' facile vedere che $T(n) = \Omega(n^2)$; proviamo a dimostrare che $T(n) = O(n^2)$.

- Caso base: $n = 0$ falso, devo dimostrare $T(1)$, $T(2)$, $T(3)$
- Ipotesi induttiva: $\forall n' < n : T(n') \leq c(n')^2$
- Passo induttivo:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(\lfloor n/4 \rfloor) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n^2 \\ &\leq 2c\lfloor n/4 \rfloor^2 + c\lfloor n/2 \rfloor^2 + n^2 \\ &\leq 2cn^2/16 + cn^2/4 + n^2 \\ &= 3/8cn^2 + n^2 \leq cn^2 \end{aligned}$$

  L'ultima disequazione è vera per $c \geq 8/5$.

Abbiamo quindi dimostrato che $T(n) = \Theta(n^2)$, con $c \geq 8/5$ e $m = 1$.