Famiglia

Trovare i limiti superiori e inferiori più stretti possibili per la seguente famiglia di equazioni di ricorrenza, per valori di a interi positivi.

$$T(n) = \begin{cases} aT(\lfloor n/2 \rfloor) + n^{a-1} & n \geq 2 \\ 1 & n < 2 \end{cases}$$

Analisi – Problema – $T(m) + T(n-m)$

Si consideri la seguente equazione di ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} T(m) + T(n-m) + 1 & n > m \\ 1 & n \leq m \end{cases}$$

dove m è una costante intera positiva.

Si trovino, tramite il metodo della sostituzione, un limite superiore ed un limite inferiore per $T(n)$. Fare particolare attenzione ai casi base.

Maggioranza

Scrivere una funzione

boolean hasMajority(**int**[ ] A, **int** n)

che prenda in input un vettore ordinato A contenente n interi e restituisca **true** se A contiene un valore di maggioranza, ovvero un valore che compare più di $n/2$ volte; restituisca **false** altrimenti. Soluzioni di costo computazionale lineare non verranno prese in considerazione.

Discutere correttezza e complessità dell'algoritmo proposto.

Griglia quadrata

Si consideri un griglia quadrata $n \times n$ celle.

- Ogni cella è colorata con un colore in $\{1, 2, 3\}$
- Per semplicità, supponete che nella griglia sia presente almeno una cella di colore 1 e almeno una cella di colore 3.
- Supponete di partire da una cella di colore 1
- Ad ogni passo potete muovervi di una cella in alto, in basso, a destra o a sinistra
- L'obiettivo è raggiungere una cella con colore 3

Scrivere un algoritmo che prende in input una griglia rappresentata da una matrice di interi e restituisca il numero minimo di passi *necessari* per raggiungere una qualunque cella di colore 3 a partire da una qualunque cella di colore 1.
Discutere correttezza e complessità dell'algoritmo proposto.

Griglia quadrata

Ad esempio, si consideri la matrice seguente:

1	2	2	3
2	1	2	3
2	2	2	**3**
3	2	**1**	**2**

La risposta da dare è 2, perchè non esistono celle 1 e 3 adiacenti ma esistono percorsi formati da due passi (come quello evidenziato in grassetto, che però non è l'unico).

Grafi – Tutte le strade portano a Roma

Un vertice v in un grafo orientato G si dice di tipo "Roma" se ogni altro vertice w in G può raggiungere v con un cammino orientato che parte da w e arriva a v.

1. Scrivere un algoritmo che dati un grafo G e un vertice v, determina se v è un vertice di tipo "Roma" in G.
2. Scrivere un algoritmo che, dato un grafo G, determina se G contiene un vertice di tipo "Roma".

In entrambi i casi è possibile trovare un algoritmo con complessità $O(m+n)$, ma anche altre complessità verranno considerate.

Spoiler alert!