

Grafi – Stessa distanza

- In un grafo orientato G , dati due nodi s e v , si dice che:
 - v è raggiungibile da s se esiste un cammino da s a v ;
 - la distanza di v da s è la lunghezza del più breve cammino da s a v (misurato in numero di archi), oppure $+\infty$ se v non è raggiungibile da s
- Scrivere un algoritmo che prenda in input un grafo orientato $G = (V, E)$ e due nodi $s_1, s_2 \in V$ e che restituisca il numero di nodi in V tali che:
 - siano raggiungibili sia da s_1 che da s_2 , e
 - si trovino alla stessa distanza da s_1 e da s_2 .
- Discutere la complessità dell'algoritmo proposto.

Grafi – Grafi bipartiti

- Un grafo non orientato G è **bipartito** se l'insieme dei nodi può essere partizionato in due sottoinsiemi disgiunti tali che nessun arco del grafo connette due nodi appartenenti allo stesso sottoinsieme.
- $G = (V, E)$ è **2-colorabile** se è possibile trovare una **2-colorazione** di esso, ovvero un **assegnamento** $c[u] \in C$ per ogni nodo $u \in V$, dove C è un insieme di "colori" di dimensione 2, tale che:

$$(u, v) \in E \Rightarrow c(u) \neq c(v)$$

- Si dimostri che G è bipartito:
 - se e solo se è 2-colorabile
 - se e solo se non contiene circuiti di lunghezza dispari
- Scrivere un algoritmo che prenda in input un grafo bipartito G e restituisca una 2-colorazione di G sull'insieme di colori $C = \{0, 1\}$, espressa come un vettore $c[1 \dots n]$. Discuterne la complessità.

Grafi – Distanza fra partizioni

- Dato un grafo G e due sottoinsiemi V_1 e V_2 dei suoi vertici, si definisce **distanza tra V_1 e V_2** la distanza minima per andare da un nodo in V_1 ad un nodo in V_2 , misurata in numero di archi.
- Nel caso V_1 e V_2 non siano disgiunti, allora la distanza è 0.
- Scrivere un algoritmo $\text{mindist}(\text{GRAPH } G, \text{SET } V_1, \text{SET } V_2)$ che restituisce la distanza minima fra V_1 e V_2 .
- Discutere complessità e correttezza, assumendo che l'implementazione degli insiemi sia tale che il costo di verificare l'appartenenza di un elemento all'insieme abbia costo $O(1)$.
- Nota: è facile scrivere un algoritmo $O(nm)$; esistono tuttavia algoritmi di complessità $O(n^2)$ (con matrice di adiacenza) e $O(m + n)$.

Grafi – Connetti il grafo

- Progettare un algoritmo efficiente che dato un grafo non orientato, **restituisca il numero minimo di archi** da aggiungere per renderlo connesso.
- Progettare un algoritmo efficiente che dato un grafo non orientato, **aggiunga** il numero minimo di archi necessari a renderlo connesso.

Spoiler alert!

Stessa distanza

```
int sameDistance(GRAPH  $G$ , NODE  $s_1$ , NODE  $s_2$ )
```

```
int  $dist_1$  = new int[1... $G.n$ ]  
int  $dist_2$  = new int[1... $G.n$ ]  
erdos( $G$ ,  $s_1$ ,  $dist_1$ )  
erdos( $G$ ,  $s_2$ ,  $dist_2$ )  
int  $counter$  = 0  
foreach  $u \in G.V()$  do  
    if  $dist_1[u] \neq -1$  and  $dist_1[u] == dist_2[u]$  then  
         $counter = counter + 1$   
return  $counter$ 
```

Grafi – Grafi bipartiti

- Se G è bipartito, è 2-colorabile. Diamo colore 0 a tutti i nodi in una partizione, diamo colore 1 a tutti i nodi nell'altra. Non essendoci archi fra i nodi di una partizione, la colorazione è valida.
- Se G è 2-colorabile, non contiene cicli di lunghezza dispari.
Supponiamo per assurdo che esista un ciclo $(v_1, v_2), (v_2, v_3) \dots, (v_{k-1}, v_k), (v_k, v_1)$, con k dispari. Se il nodo v_1 ha colore 1, il nodo v_2 deve avere colore 2; il nodo v_3 deve avere colore 1, e così via fino al nodo v_k , che deve avere colore 1. Poichè v_1 è successore di v_k , v_1 deve avere colore 2, assurdo.

Grafi – Grafi bipartiti

- Se non esistono cicli di lunghezza dispari, il grafo è bipartito.

Dimostriamo questa affermazione costruttivamente. Si prenda un nodo x lo si assegna alla partizione S_1 . Si prendono poi tutti i nodi adiacenti a nodi in S_1 e li si assegna alla partizione S_2 . Si prendono tutti i nodi adiacenti a nodi in S_2 e li si assegna alla partizione S_1 . Questo processo termina quando tutti i nodi appartengono ad una o all'altra partizione. Un nodo può essere assegnato più di una volta se e solo se fa parte di un ciclo. Ma affinché venga assegnato a due colori diversi, deve far parte di un ciclo di lunghezza dispari, e questo non è possibile.

Grafi – Grafi bipartiti

Questa funzione ritorna un vettore di colori se il grafo è 2-colorabile, **nil** altrimenti.

```
int[] color(GRAPH G)
```

```
int[] colors = new int[1 ... G.n]  
for u ∈ G.V() do  
    | colors[u] = -1  
foreach u ∈ G.V() do  
    | if colors[u] < 0 then  
        | if not colorRec(G, u, colors, 0) then  
            | | return nil  
return colors
```

Grafi – Grafi bipartiti

Questa funzione ritorna **true** se il grafo è 2-colorabile, **false** altrimenti.

```
boolean colorRec(GRAPH G, NODE u, int color)
```

```
  colors[u] = color
```

```
  foreach v ∈ G.adj(u) do
```

```
    if colors[v] < 0 then
```

```
      if colorRec(G, u, colors, 1 − color) == false then
```

```
        return false
```

```
    else if colors[v] == color then
```

```
      return false
```

```
return true
```

Distanza fra partizioni

mindist(GRAPH G , SET V_1 , SET V_2)

QUEUE $Q = \text{Queue}()$

int[] $dist = \text{new int}[1 \dots G.n]$

foreach $u \in G.V()$ **do**

if $V_1.\text{contains}(u)$ **then**

$Q.\text{enqueue}(u)$

$dist[u] = 0$

if $V_2.\text{contains}(u)$ **then**

return 0

else

$dist[u] = \infty$

Distanza fra partizioni

```
while not  $Q$ .isEmpty() do
  NODE  $u = Q$ .dequeue()
  foreach  $v \in G.\text{adj}(u)$  do
    if  $\text{dist}[v] == \infty$  then
       $\text{dist}[v] = \text{dist}[u] + 1$ 
      if  $V_2.\text{contains}(v)$  then
        return  $\text{dist}[v]$ 
       $Q.\text{enqueue}(v)$ 
return  $+\infty$ 
```

Grafi – Connetti il grafo - 1

```
int numberToConnect(GRAPH  $G$ )
```

```
int[]  $id = \text{new int}[1 \dots G.n]$ 
```

```
foreach  $u \in G.V()$  do  $id[u] = 0$ 
```

```
int  $counter = 0$ 
```

```
foreach  $u \in G.V()$  do
```

```
    if  $id[u] == 0$  then  
         $counter = counter + 1$   
         $ccdfs(G, counter, u, id)$ 
```

```
return  $counter - 1$ 
```

```
 $ccdfs(\text{GRAPH } G, \text{int } counter, \text{NODE } u, \text{int}[] \mathit{id})$ 
```

```
     $id[u] = counter$   
    foreach  $v \in G.adj(u)$  do  
        if  $id[v] == 0$  then  
             $ccdfs(G, counter, v, id)$ 
```

Grafi – Connetti il grafo - 2

numberToConnect(GRAPH G)

int[] id = **new int**[1... $G.n$]

int[] *representative* = **new int**[1... $G.n$]

foreach $u \in G.V()$ **do** $id[u] = 0$

int $counter = 0$

foreach $u \in G.V()$ **do**

if $id[u] == 0$ **then**

$counter = counter + 1$

representative[$counter$] = u

 ccdfs($G, counter, u, id$)

for $i = 2$ **to** $counter$ **do**

$G.insertEdge(i - 1, representative[i])$

ccdfs(GRAPH G , **int** $counter$, NODE u , **int**[] id)

$id[u] = counter$

foreach $v \in G.adj(u)$ **do**

if $id[v] == 0$ **then**

 ccdfs($G, counter, v, id$)