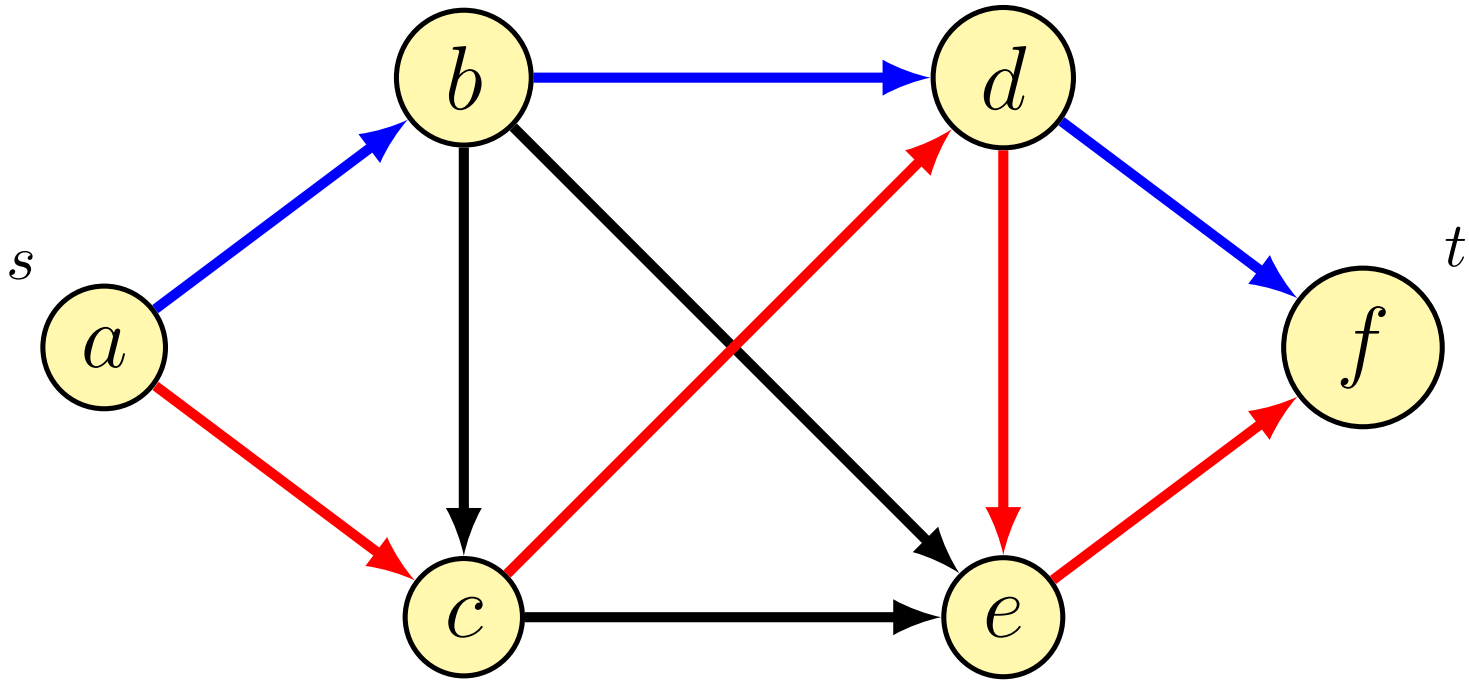
Cammini indipendenti (Esercizio 1.5 di 15-locale.pdf)

Dato un grafo orientato $G = (V, E)$ e due vertici $s, t \in V$, descrivere un algoritmo che restituisca la dimensione del più grande insieme di cammini edge-disjoint fra s e t.
Un insieme di cammini si dice edge-disjoint se ogni arco del grafo può comparire al massimo in uno dei cammini.



Torri di controllo (Esercizio 1.7 di 15-locale.pdf)

- Si consideri un insieme di aerei $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ e un insieme di torri di controllo $T = \{t_1, \ldots, t_m\}$.
- In un certo istante, ogni aereo a_i si trova alle coordinate $(a_i.x, a_i.y)$ e ogni torre t_j si trova alle coordinate $(t_j.x, t_j.y)$.
- Vincoli:
  - Carico: ogni torre può gestire al più L aerei;
  - Distanza: ogni torre può gestire aerei che si trovino al più a distanza d da essa.
- Descrivere un algoritmo che assegni ogni aereo ad una torre, rispettando i vincoli sul carico e sulla distanza.
- Discutere correttezza e complessità.

Prima elementare (Compito 01/02/12)

A mia figlia (prima elementare) è stato chiesto di disegnare tutte le possibili sequenze composte da tre pallini rossi e due pallini gialli.

1. Scrivere un algoritmo che stampa tutte le possibili stringhe composte da n caratteri R e da m caratteri G, per un totale di $n + m$ caratteri.
2. Scrivere un algoritmo che conta tutte queste possibile stringhe – ovviamente senza generarle tutte e poi contandole.
3. Calcolare la complessità computazionale degli algoritmi proposti.

Somma di quadrati (Compito 26/1/16)

Ogni intero positivo n può essere scritto come somma di quadrati di interi; ad esempio, $3 = 1^2 + 1^2 + 1^2$, $7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$, mentre $13 = 3^2 + 2^2$.

Ovviamente, esistono più modi per esprimere un numero come somma di quadrati; 13 può essere espresso anche come $2^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2$.

Scrivere un algoritmo che, preso in input n, restituisce il *numero minimo di quadrati* la cui somma è pari ad n.

Ad esempio, nel caso di 13, $3^2 + 2^2$ richiede 2 quadrati, mentre $2^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2$ richiede 4 quadrati, quindi l'algoritmo deve restituire 2.

Discuterne correttezza e complessità.

Somma di quadrati (Compito 26/1/16)

Scrivere un algoritmo che, dato n, stampa **tutti** i modi possibili per esprimere n come somma di quadrati, discutendo correttezza e complessità; ad esempio, con $n = 13$, stamperà:

$$1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$$
$$2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$$
$$2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$$
$$2^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2$$
$$3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$$
$$3^2 + 2^2$$

Spoiler alert!

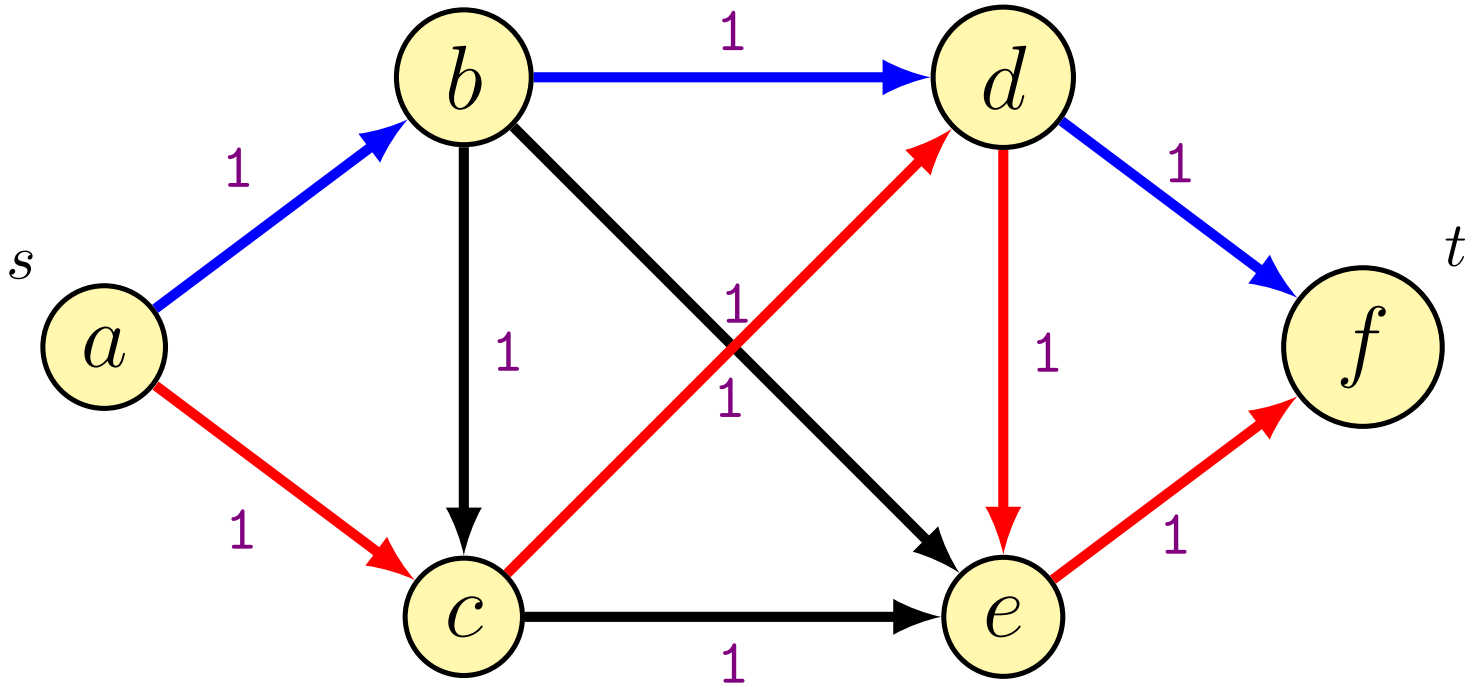
Cammini indipendenti (Esercizio 1.5 di 15-locale.pdf)

Si costruisce una funzione di capacità c tale per cui

$$c(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in E \\ 0 & (x,y) \notin E \end{cases}$$

Si consideri il valore del flusso massimo flusso fra s (sorgente) e t (pozzo); questo valore corrisponde al numero totale di cammini indipendenti, in quanto essendo la capacità di tutti gli archi pari ad 1, ogni cammino aumentante avrà valore di flusso 1 e i suoi archi avranno capacità residua zero. In questo modo, ogni arco può essere utilizzato in un solo cammino.

Cammini indipendenti



Cammini indipendenti

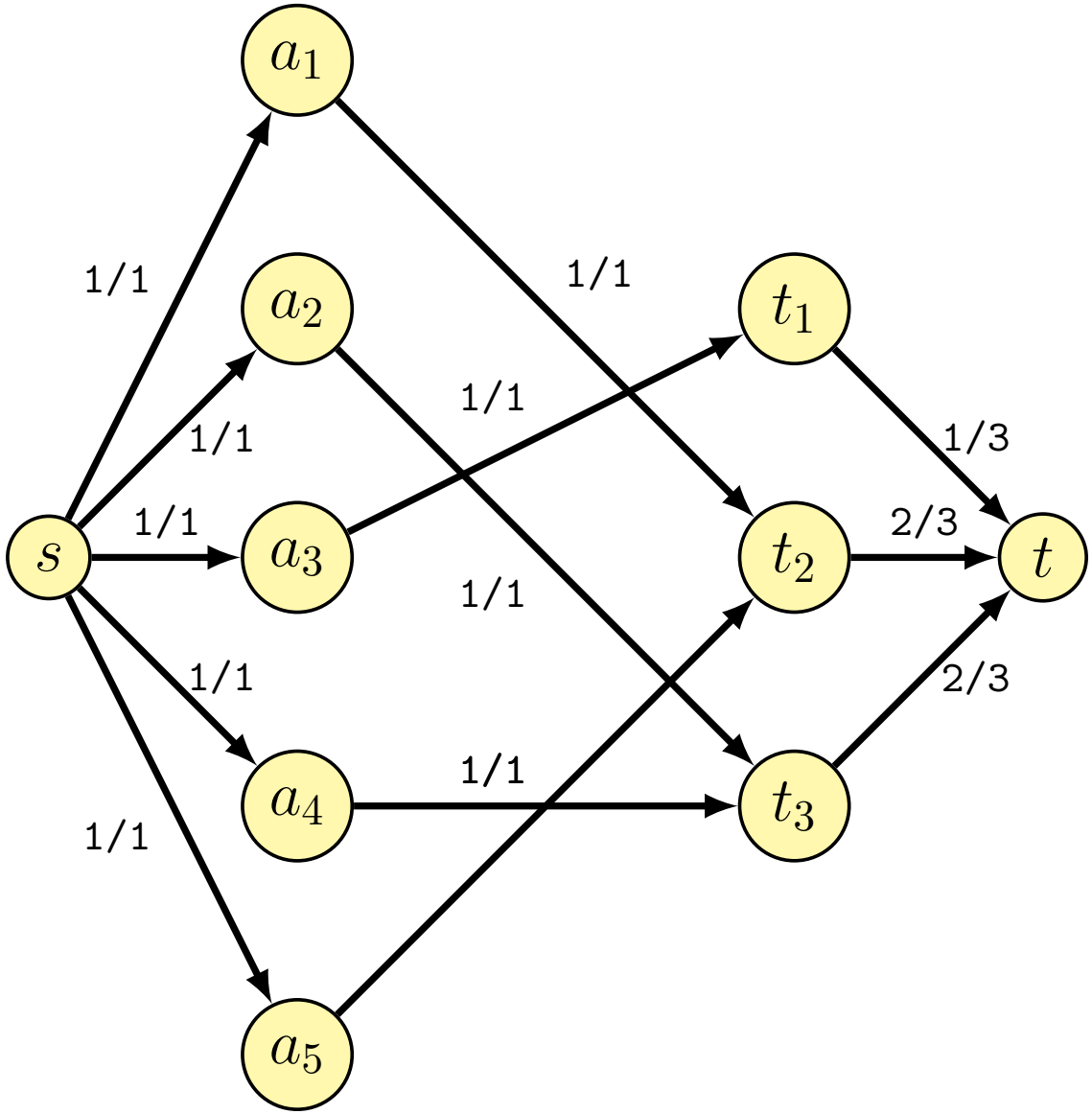
Complessità

- Seguendo il limite di Ford-Fulkerson, il costo dell'algoritmo è $O(|f^*|(n+m))$.
- $|f^*|$ è limitato da $O(n)$, perché ci sono al più $(n-1)$ archi che escono dalla sorgente (o che entrano nel pozzo)
- Quidi la complessità risultante è $O(n(m+n)) = O(mn)$.

Torri di controllo (Esercizio 1.7 di 15-locale.pdf)

- È possibile associare ad ogni aereo ed ad ogni torre i vertici di un grafo bipartito:
- L'insieme $V = \{s, t\} \cup \{a_1, \ldots, a_n\} \cup \{t_1, \ldots, t_m\}$ è costituito dai nodi sorgente, pozzo, i nodi aerei e i nodi torri.
- Nell'insieme E si inseriscono:
  - un arco (s, a_i) con capacità 1 fra la sorgente e ogni aereo a_i;
  - un arco (a_i, t_j) con capacità 1 se l'aereo a_i è entro la portata radio della torre t_j (ovvero, se $\sqrt{(a_i.x - t_j.x)^2 + (a_i.y - t_j.y)^2} \leq r$);
  - un arco (t_j, t) con capacità L fra ogni torre e il pozzo t.

Torri di controllo (Esercizio 1.7 di 15-locale.pdf)



Torri di controllo (Esercizio 1.7 di 15-locale.pdf)

- In questo modo:
  - ogni aereo viene assegnato al massimo a una torre di controllo;
  - ogni torre controllo può essere assegnato al massimo a L aerei.
- Gli archi il cui flusso è pari a 1 corrispondono agli assegnamenti aerei-torri. Il flusso massimo è limitato superiormente da n.
- Il numero di nodi è pari a $|V| = n + m + 2$;
- il numero di archi è pari a $|E| = n + m + O(nm)$.
- Utilizzando il limite di Ford e Fulkerson, il costo dell'algoritmo risultante è quindi $O(n(|V| + |E|)) = O(n^2 m)$.

Prima elementare – Backtracking

printRGRec(**char**[ ] S, **int** i, **int** n, **int** m)

```
if n == 0 and m == 0 then
    print S
else
    if n > 0 then
        S[i] = "R"
        printRGRec(S, i + 1, n − 1, m)
    if m > 0 then
        S[i] = "G"
        printRGRec(S, i + 1, n, m − 1)
```

printRG(**int** n, **int** m)

```
int[ ] S = new char[1 . . . n + m]
printRGRec(S, 1, n, m)
```

Prima elementare – Conteggio inefficiente

```
int countRGRec(int n, int m)
if n == 0 or m == 0 then
    return 1
else
    return countRGRec(n − 1, m) + countRGRec(n, m − 1)
```

```
int countRG(int n, int m)
return countRGRec(n, m)
```

Complessità: $O((n+m)2^{n+m})$ se consideriamo che a ogni passo ho al più due chiamate ricorsive. Più precisamente, $O\left((n+m)\frac{(n+m)!}{n!m!}\right)$.

Prima elementare – Conteggio programmazione dinamica

int countRG(**int** n, **int** m)

int[ ][ ] DP = **new int**$[0 \ldots n][0 \ldots m]$
for $i = 0$ **to** n **do**
  $DP[i][0] = 1$
for $j = 0$ **to** m **do**
  $DP[0][j] = 1$
for $i = 1$ **to** n **do**
  for $j = 1$ **to** m **do**
    $DP[i][j] = DP[i-1][j] + DP[i][j-1]$
return $DP[n][m]$

Complessità: $O(nm)$

Prima elementare – Conteggio tramite calcolo combinatorio

int countRG(**int** n, **int** m)

return fact$(n+m)/(\text{fact}(n) \cdot \text{fact}(m))$

- Complessità (criterio uniforme): $O(n+m)$
- Complessità (criterio logaritmico): $O((n+m)^2 \log^2(n+m))$
- Complessità (criterio logaritmico, fast multiplication, algoritmo efficiente): $O((n+m)(\log(n+m)\log\log(n+m))^2)$

Peter B. Borwein. *On the complexity of calculating factorials.* In Journal of Algorithms, 6(3):376-380, 1985. [PDF]

Somma di quadrati

Sia $DP[n]$ il minimo numero di quadrati necessari per esprimere n.

- Caso base: $DP[0] = 0$ (non consideriamo il caso $0^2 = 0$, in quanto è possibile ottenere 0 non sommando nulla)
- Ricorsione: consideriamo i valori t tali che $1 \leq t^2 \leq n$; consideriamo quindi i sottoproblemi $DP[n - t^2]$ e scegliamo fra questi quello che richiede il minor numero di quadrati, aggiungendo 1 per il quadrato considerato.

$$DP[n] = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \min_{1 \leq t \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor} \{DP[n - t^2] + 1\} & n \geq 1 \end{cases}$$

Somma di quadrati – Programmazione dinamica

int squareSum(**int** n)

int[ ] DP = **new int**$[0 \ldots n]$
$DP[0] = 0$
for $i = 1$ **to** n **do**
    $DP[i] = +\infty$
    for $t = 1$ **to** $\lfloor \sqrt{i} \rfloor$ **do**
        $DP[i] = \min(DP[i], DP[i - t^2] + 1)$
return $DP[n]$

Somma di quadrati – Complessità

- Complessità: $\Theta(n\sqrt{n})$.
- Lagrange ha dimostrato (Teorema dei quattro quadrati) che ogni intero positivo può essere espresso come somma di (al più) quattro quadrati perfetti

  `https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange%27s_four-square_theorem`
- Michael O. Rabin and Jeffrey Shallit hanno proposto algoritmi probabilistici di complessità polilogaritmica per identificare i quattro quadrati:
  - M. Rabin, J. Shallit. "Randomized Algorithms in Number Theory". Communications on Pure and Applied Mathematics. 39(S1):S239–S256 (1986)
- Un documento più recente è il seguente:
  - P. Pollack, E. Treviño. Finding the four squares in Lagrange's Theorem. [PDF]

Somma di quadrati – Backtracking

Per risolvere la seconda parte del problema, dobbiamo invece utilizzare la tecnica di backtracking. Una versione semplice per risolvere il problema potrebbe scegliere tutti i possibili valori di t tali per cui $1 \leq t^2 \leq n$, e provare ricorsivamente tutte le possibilità:

psRec(**int** n, **int**[ ] S, **int** i)

```
if n == 0 then
    print S[1 ... i − 1]
else
    for t = 1 to ⌊√n⌋ do
        s[i] = t
        psRec(n − t², S, i + 1)
```

printSquare(**int** n)

```
int[ ] S = new int[1 ... n]
psRec(n, S, 1)
```

Somma di quadrati – Backtracking

- Il vettore S delle scelte ha dimensione n (somma di tutti 1).
- La complessità è superpolinomiale.
- L'algoritmo appena visto, tuttavia, stampa anche tutte le permutazioni dei quadrati.
- È accettabile per il compito, ma una soluzione migliore evita le permutazioni imponendo un ordine ai valori che vengono sommati.
- Si aggiunge un parametro *limit* per imporre l'ordine
- I valori scelti sono limitati ricorsivamente da *limit*
- Se si è scelto il valore t, tutte le scelte successive devono essere minori o uguali a quel valore

Somma di quadrati – Backtracking

psRec(**int** n, **int**[ ] S, **int** i, **int** *limit*)

```
if n == 0 then
    print S[1 ... i − 1]
else
    for t = 1 to min(⌊√n⌋, limit) do
        s[i] = t
        psRec(n − t², S, i + 1, t)
```

printSquare(**int** n)

```
int[ ] S = new int[1 ... n]
psRec(n, S, 1, ⌊√n⌋)
```