Limite inferiore per costruzione ABR

Limite inferiore

Sia V un vettore non ordinato contenente n valori interi distinti.

Si consideri il problema di costruire un albero binario di ricerca a partire dai dati in V. Dimostrare che il limite inferiore per questo problema è $\Omega(n \log n)$.

Costruzione ABR di altezza minima (Bonus)

Dato un vettore V di n interi ordinati e distinti, scrivere una procedura che costruisca un albero binario di ricerca di altezza minima. Discutere correttezza e complessità dell'algoritmo proposto

Vito's Family

The famous gangster Vito Deadstone is moving to New York. He has a very big family there, all of them living on Lamafia Avenue. Since he will visit all his relatives very often, he wants to find a house close to them. Indeed, Vito wants to minimize the total distance to all of his relatives and has blackmailed you to write a program that solves his problem.

Input For each test case you will be given the integer number of relatives r $(0 < r < 500)$ and the street numbers (also integers) $s_1, s_2, ..., s_i, ..., s_r$ where they live $(0 < s_i < 30000)$. Note that several relatives might live at the same street number.

Output For each test case, your program must write the minimal sum of distances from the optimal Vito's house to each one of his relatives. The distance between two street numbers s_i and s_j is $d_{i,j} = |s_i - s_j|$.

Spoiler alert!

Limite inferiore per costruzione ABR

Se fosse possibile costruire un albero in $o(n \log n)$, allora sarebbe possibile visitare l'albero tramite una in-visita in tempo $O(n)$, ottenendo i valori ordinati. Avremmo così realizzato un algoritmo di ordinamento che opera in tempo $o(n \log n)$.

Vito

Il numero civico ottimale è la mediana.

Si consideri il caso di n dispari e quindi di una singola mediana m; m ha una quantità $(n-1)/2$ di numeri civici sia alla destra che alla sinistra. Il caso con n pari e quindi due valori mediani è simile.

Si consideri ogni altra soluzione m' diversa dalla mediana e assumiamo che $m < m'$ (il caso $m > m'$ è simmetrico).

Sia $d = m' - m$ la differenza fra questi due numeri civici. Nella soluzione in cui abbiamo scelto m', tutti i civici che si trovano a sinistra di m' costano d unità in più rispetto alla soluzione in cui abbiamo scelto m. Tutti i civici a destra di m' (m' incluso) costano d unità in meno rispetto alla soluzione in cui abbiamo scelto m.

Poiché i numeri civici a sinistra di m' sono di più dei numeri civici a destra di m' (m' incluso), la soluzione m' costa più della soluzione m.

Complessità: $O(n)$ per il calcolo della mediana