

Cammini minimi fra tutte le coppie

Alberto Montresor

17/04/2009

1 Introduzione

Problema dei cammini minimi fra tutte le coppie: ad esempio, quando si vuole creare la tabella con le distanze fra tutte le città di un atlante stradale.

Per risolvere questo problema, possiamo utilizzare le soluzioni per i cammini minimi da singola sorgente per ogni vertice del grafo.

- In caso di archi non negativi, possiamo utilizzare Dijkstra con un costo $O((V^2 + VE) \log V)$ (con min-heap binario, il limite può essere semplificato come $O(VE \log V)$) oppure con costo $O(VE + V^2 \log V)$ utilizzando uno Heap di Fibonacci.
- In caso di archi negativi, possiamo utilizzare Bellman-Ford con un costo $O(V^2E)$, che corrisponde a V^4 nel caso peggiore (grafi non sparsi).

E' possibile fare di meglio:

- L'algoritmo di Floyd e Warshall permette di risolvere il problema in tempo $O(V^3)$ con archi negativi (ovviamente senza cicli negativi). Nota: nel Cormen si specifica che l'algoritmo funziona con matrice di adiacenza; sembra quasi che sia "necessaria"; l'idea è invece che alla fine si produrrà una matrice delle distanze che inizialmente è una matrice dei pesi degli archi. Ma il costo per trasformare una rappresentazione a lista in una rappresentazione a matrice è $O(V^2)$
- Utilizzando una rappresentazione a liste di adiacenza, l'algoritmo di Johnson permette di risolvere il problema in $O(VE + V^2 \log V)$, che nel caso di grafi sparsi è migliore di $O(V^3)$.

2 Algoritmo di Floyd e Warshall

Questo algoritmo è basato su una tecnica di programmazione dinamica.

Tutte le definizioni e le discussioni che seguono assumono la presenza di un grafo $G = (V, E)$ orientato con una funzione di costo $w : E \rightarrow \mathbf{R}$. Assumeremo inoltre che i vertici siano ordinati in qualche modo e li denoteremo $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Definizione 1. Sia k un valore in $\{0, \dots, n\}$. Diciamo che un cammino p_{xy}^k è un cammino minimo k -vincolato fra x e y se esso ha il costo minimo fra tutti i cammini fra x e y che non passano per nessun vertice in v_{k+1}, \dots, v_n (x e y sono esclusi dal vincolo).

Definizione 2. Se esiste un cammino minimo k -vincolato p_{xy}^k fra x e y , definiamo $\delta^k(x, y) = w(p_{xy}^k)$; nel caso tale cammino non esista, $\delta^k(x, y) = +\infty$.

E' immediato osservare che $\delta^0(x, y) = w(x, y)$ se $(x, y) \in E$, altrimenti $\delta^0(x, y) = +\infty$.

Teorema 1 (Sottostruttura ottima). Ogni sottocammino di un cammino minimo k -vincolato in G è esso stesso un cammino minimo k -vincolato in G .