Cammini minimi

Alberto Montresor

17/04/2009

1 Introduzione

1.1 Definizione di cammino minimo

Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato e $w : E \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione di peso sugli archi.
Come interpretare i pesi degli archi: lunghezze, tempi, costi, penalità, perdite o altre quantità che si accumulano lungo il cammino e bisogna minimizzare.

Definizione 1 (Peso di un cammino)**.** *Il peso $w(p)$ di un cammino $p = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ è la somma dei pesi degli archi che lo compongono:*

$$w(p) = \sum_{i=1}^{k-1} w(\langle v_i, v_{i+1} \rangle)$$

Definizione 2 (Peso di un cammino minimo)**.** *Il peso di un cammino minimo da v_1 a v_k è definito come:*

$$\delta(v_1, v_k) = \begin{cases} \min\{\, w(p) \mid \exists p : v_1 \xrightarrow{p} v_k \,\} & \textit{se esiste un cammino da } v_1 \textit{ a } v_k \\ \infty & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Un cammino p dal vertice v_1 al vertice v_k è *minimo* se e solo se $w(p) = \delta(v_1, v_k)$.

1.2 Problemi

Cammini minimi da sorgente unica

Input: nodo sorgente s. Output: i cammini minimi che vanno da s a tutti gli altri nodi v.
Argomento della prima parte di queste lezioni.

Cammini minimi a destinazione unica

Input: nodo destinazione d. Output: i cammini minimi che vanno da qualunque nodo v a d.
Basta utilizzare gli algoritmi per sorgente unica utilizzando il grafo trasposto.

Cammino minimo tra una coppia di vertici

Input: una copia di vertici s, d. Output: un cammino minimo fra s e d.
Si risolve il primo problema e si estrae il cammino richiesto. Non si conoscono algoritmi che abbiano tempo di esecuzione migliore.

Cammini mimimi tra tutte le coppie di vertici

Input: il grafo. Output: i cammini minimi fra tutte le coppie di vertici.
Argomento della seconda parte.

1.3 Sottostruttura ottima

Lemma 1 (I sottocammini di un cammino minimo sono minimi)**.** *Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato e $w : E \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione di peso. Sia $p = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ un cammino. Sia $p_{i,j} = \langle v_i, \ldots, v_j \rangle$ un sottocammino di p. Allora $p_{i,j}$ è un cammino minimo da v_i a v_j.*