Mathematical Logic
– Prova intermedia – Logica proposizionale – **Soluzioni**
6 Novembre 2015

Esercizio 1. [6 punti]
Considera il testo seguente:

> *Mario è architetto oppure è geometra; Se Mario fosse architetto, allora Mario sarebbe laureato; Mario non è laureato, quindi Mario è geometra.*

Utilizzando il seguente linguaggio:

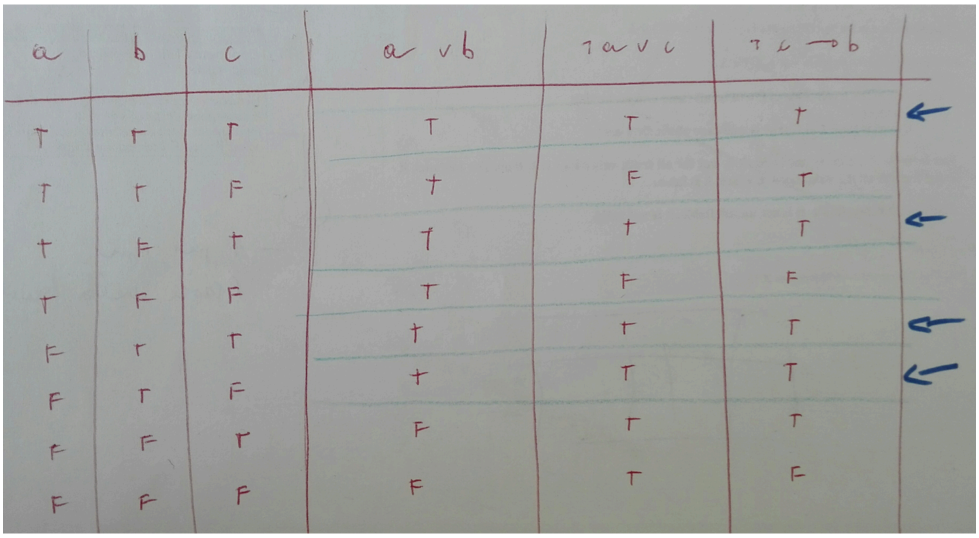
- a = "Mario è architetto"
- b = "Mario è geometra"
- c = "Mario è laureato"

Formalizzare il problema posto sopra e verificare se la conclusione deriva dalle premesse utilizzando le tavole verità.

- Una possibile formalizzazione è la seguente:
  - Mario è architetto oppure è geometra: $a \vee b$
  - Se Mario fosse architetto allora Mario sarebbe laureato: $a \rightarrow c$
  - Mario non è laureato: $\neg c$
  - Verificare che $\{a \vee b, a \rightarrow c, \neg c\} \vDash b$. Per farlo con le tavole di verità verifico che tutte le interpretazioni che rendono vere le premesse {}, rendono vera anche la conclusione b. Di seguito la tavola di verità:

a	b	c	$a \vee b$	$a \supset c$	$\neg c$
T	T	T	T	T	F
T	T	F	T	F	T
T	F	T	T	T	F
T	F	F	T	F	T
F	T	T	T	T	F
F	T	F	T	T	T
F	F	T	F	T	F
F	F	F	F	T	T

- Data l'ambiguità del linguaggio naturale, una formalizzazione alternativa è la seguente:
  - Mario è architetto oppure è geometra: a ∨ b (oppure (a ∧ ¬b) ∨ (¬a ∧ b))
  - Se Mario fosse architetto allora Mario sarebbe laureato: a → c
  - Mario non è laureato: ¬c
  - Verificare che {a ∨ b, ¬a ∨ c} ⊨ ¬c → b. Per farlo con le tavole di verità verifico che tutte le interpretazioni che rendono vere le premesse {}, rendono vera anche la conclusione b. Di seguito la tavola di verità:



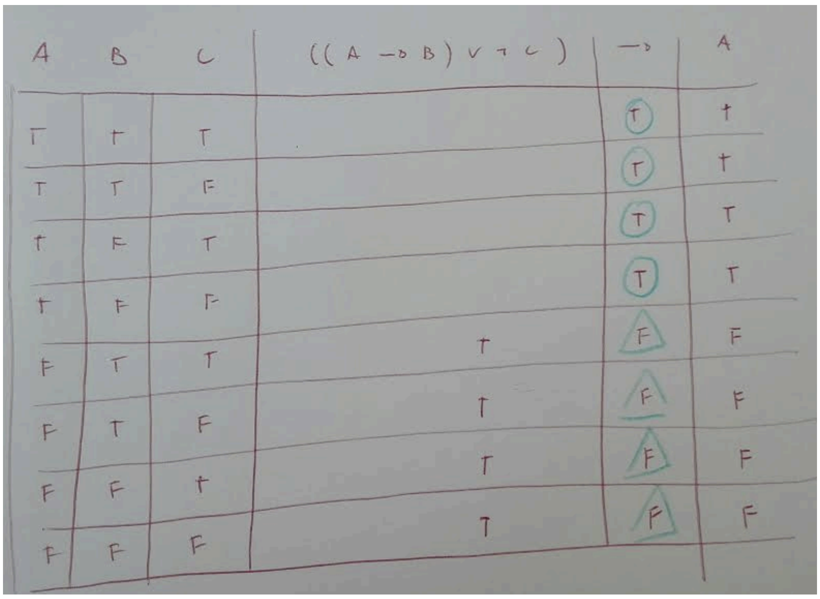
a	b	c	a ∨ b	¬a ∨ c	¬c → b
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	T
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T
F	F	T	F	T	T
F	F	F	F	T	F

  - **Nota**: valgono anche le combinazioni delle formalizzazioni fornite.

Esercizio 2. [4 punti]

Determina tramite tavola di verità se la formula ((A → B) ∨ ¬C) → A è soddisfacibile, non soddisfacibile o valida (motivare la risposta).

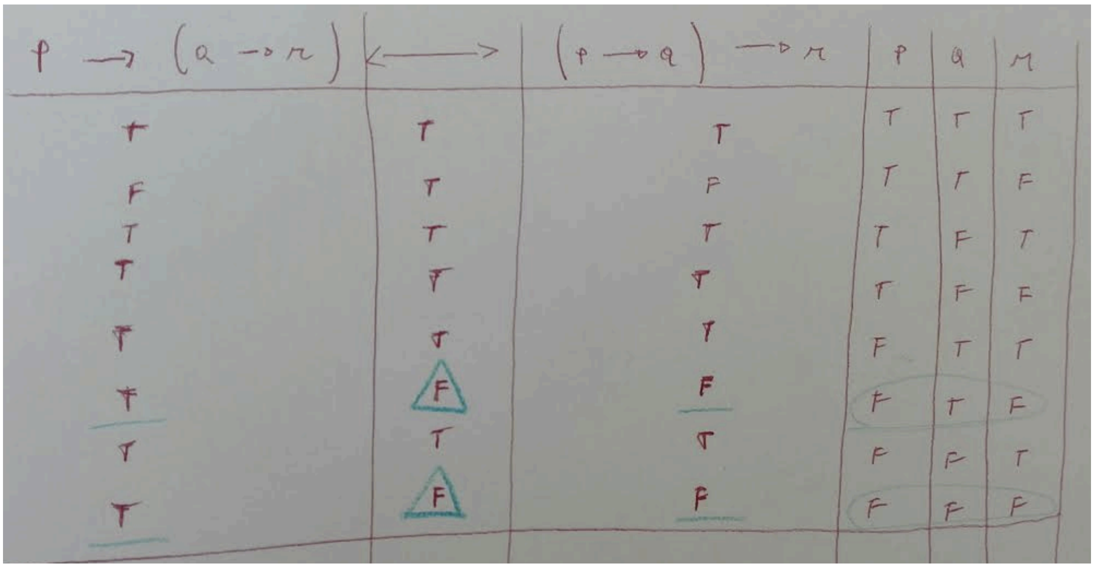
- La formula è soddisfacibile perché, come si evince dalla tavola di verità che segue, ci sono 4 interpretazioni che la soddisfano. La formula non è valida non tutte le interpretazioni sono un modello.



A	B	C	((A → B) ∨ ¬C)	→	A
T	T	T		T	T
T	T	F		T	T
T	F	T		T	T
T	F	F		T	T
F	T	T	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	F
F	F	F	T	F	F

Esercizio 3. [4 punti] Dimostra che le formule p → (q → r) e (p → q) → r non sono equivalenti (motivare la risposta).

- Nn sono equivalenti. Infatti, dalla tavola di verità che segue si osserva che le interpretazioni che assegnano a p, q e r falso, e p falso, q vero e r falso, rendono vera la prima formula e falsa la seconda.



p → (q → r)	⟷	(p → q) → r	p	q	r
T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F
T	T	T	T	F	T
T	T	T	T	F	F
T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F
T	T	T	F	F	T
T	F	F	F	F	F

Esercizio 4. [2 punti]
Fornisci la definizione formale di *"interpretazione proposizionale" ("propositional interpretation").*

- Un'interpretazione proposizionale è una funzione: $\mathcal{I} : \mathcal{P} \rightarrow$ {True, False} (vedi slides)

Esercizio 5. [5 punti]
Dire se la seguente affermazione è vera (motivare la risposta).

Dato un insieme arbitrario di interpretazioni proposizionali M, se F → G è soddisfacibile in M, e F è soddisfacibile in M, allora G è soddisfacibile in M.

- L'affermazione NON è vera. Basti considerare l'insieme delle interpretazioni M = $\{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2\}$, dove $\mathcal{I}_1$(F) = $\mathcal{I}_1$(G) = False, e $\mathcal{I}_2$(F) = True and $\mathcal{I}_2$(G) = False. Abbiamo che F è soddisfacibile in M, perché $\mathcal{I}_2 \models$ F. *F → G* è soddisfacibile in M, perché $\mathcal{I}_1 \models F \rightarrow G$. D'altra parte M non contiene nessun modello che rende vera G, infatti $\mathcal{I}_1$(G) = $\mathcal{I}_2$(G) = False.
- Quanto sopra si può dimostrare anche con tavola di verità.

Esercizio 6. [4 punti]
Usando tableaux, determina se l'insieme di formule $\{\neg A, B, A \longleftrightarrow \neg B\}$ è soddisfacibile.

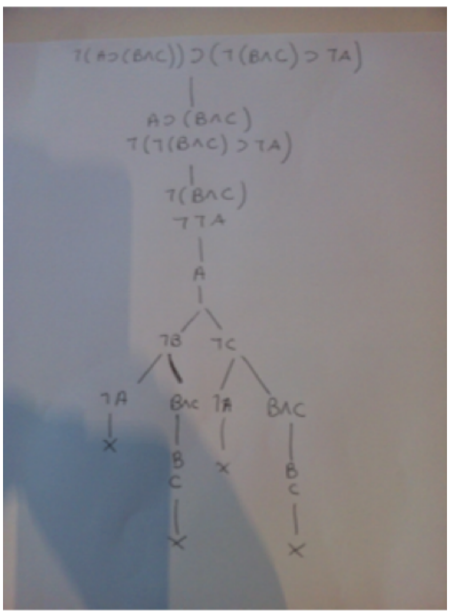
- Questo equivale a verificare se $A \wedge B \wedge (\neg A \vee \neg B) \wedge (B \vee A)$

- Dato che non tutti i rami sono chiusi l'insieme di formule è soddisfacibile.

Esercizio 7. [4 punti]
Verificare usando tableaux se:

$$\models (A \rightarrow B \wedge C) \rightarrow (\neg (B \wedge C) \rightarrow \neg A)$$

- $\models (A \rightarrow B \wedge C) \rightarrow (\neg (B \wedge C) \rightarrow \neg A)$ vale come si può vedere dal seguente tableau (è fondamentale negare la formula e verificare che quest'ultima è insoddisfacibile (tutti i rami sono chiusi):



Esercizio 8. [4 punti]
Trasforma la seguente formula in CNF:

$$(C \longleftrightarrow A) \land \neg((A \lor B) \to A$$

- $CNF(\varphi) = (\neg C \lor A) \land (\neg A \lor C) \land (A \lor B) \land \neg A$