# Exame

## Logica Matematica 2014–2015

10 Giugno 2015

---

**Istruzioni**

- indicate con una croce quale parte volete che venga valutata.
- Rispondete in Italiano utilizzando una penna ad inchiostro (no matite) a meno che il testo non vi dia altre istruzioni.
- Scrivete in modo chiaro; risposte illeggibili non saranno considerate.
- Preoccupatevi di identificare in modo chiaro ogni risposta con:
  - il numero dell'esercizio corrispondente.
  - se il caso, la parte dell'esercizio corrispondente alla risposta.
- Depennate in modo chiaro lavoro di brutta copia e risposte che non volete siano considerate prima di consegnare il compito.
- Scrivete in stampatello, nello spazio riservato all'interno di questo documento. È preferibile non utilizzare altro spazio. Se avete bisogno di altro spazio utilizzate gli altri fogli che vi vengono consegnati, indicando per ogni foglio il vostro nome, cognome, e numero di matricola in modo chiaro.

---

Desidero che vengano valutate le seguenti parti

☐ Logica Proposizionale

☐ Logica del primo ordine e logica modale

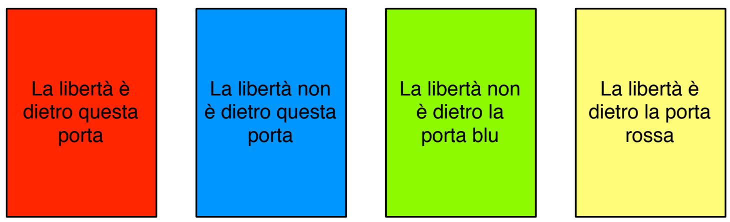
# Propositional Logic

**Esercizio 1** (Modellazione)**. [6 points]**

Kyle, Neal, e Grant si trovano intrappolati in un labirinto scuro e freddo. Cercando nel buio trovano quattro porte: la prima é rossa, la seconda é blu, la terza è verde e la quarta è gialla.

Dietro una delle porte c'é la libertá. Dietro le altre tre c'é un dragone.

Su ciascuna porta c'è un'iscrizione:




Dato che almeno una delle quattro frasi é vera e che almeno una è falsa, riescono i ragazzi ad identificare la porta da cui uscire sani e salvi? Se si, indicare quale. Giustificare le proprie risposte.

**Risposta.** Linguaggio:

- $r$: *"la libertá é dietro la porta rossa"*
- $b$: *"la libertá é dietro la porta blu"*
- $v$: *"la libertà è dietro la porta verde"*
- $g$: *"la libertà è dietro la porta gialla"*

Assiomi:

- *" dietro una porta c'è la libertà, dietro le altre tre c'é un dragone"*

$$(r \wedge \neg b \wedge \neg v \wedge \neg g) \vee (\neg r \wedge b \wedge \neg v \wedge \neg g) \vee (\neg r \wedge \neg b \wedge v \wedge \neg g) \vee (\neg r \wedge \neg b \wedge \neg v \wedge g)$$

- *"almeno una delle quattro frasi é vera"*

$$r \vee \neg b$$

- *"almeno una delle quattro frasi é falsa"*

$$\neg r \vee b$$

| $r$ | $b$ | $v$ | $g$ | 2 | 3 | $2 \wedge 3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | F | F | F | T | F | F |
| F | T | F | F | F | T | F |
| F | F | T | F | T | T | T |
| F | F | F | T | T | T | T |

I ragazzi non sanno cosa scegliere tra la porta verde e quella gialla.

**Esercizio 2** (DPLL). **[6 points]** Usando DPLL, dimostrare se il seguente insieme di formule è soddisfacibile o no. Se lo è, descrivere un modello che le soddisfi

$$\neg a \vee \neg b \vee c \vee \neg d \tag{1}$$
$$\neg b \vee \neg c \tag{2}$$
$$b \vee \neg c \vee d \tag{3}$$
$$\neg a \vee c \tag{4}$$
$$\neg a \vee b \vee \neg d \tag{5}$$
$$a \vee d \tag{6}$$

**Risposta.** Sie $\Phi$ l'insieme delle clausole (1)–(6). Applichiamo DPLL a $\Phi$.

- visto che non c'è nessuna clausual unitaria, scelgo un letterale e lo assegno ad un valore di verità. Mi conviene scegliere $a$ e assegnarlo a $\mathsf{false}$, perché $\neg a$ appare in 3 clausole, e questo porterà alla cancellazione di tutte e tre, massimizzando la semplificazione. Quindi scelgo $I(a) = \mathsf{False}$
- $\Phi|_{\neg a}$ contiene le seguenti clausole

$$\neg b \vee \neg c \tag{7}$$
$$b \vee \neg c \vee d \tag{8}$$
$$d \tag{9}$$

  Infatti le clausole (1), (4) e (5) vengono cancellate in quanto contengono il letterale $\neg a$. Dalla clausola (6) si cancella il letterale $a$ in quanto $a$ è assegnato a $\mathsf{False}$. Le clausole (2) e (3) rimangono invariate, in quanto non contengono ne il letterale $a$ ne il letterale $\neg a$.
- Notate che $\Phi|_{\neg a}$ contiene una clausola unitaria (unit clause), cioè la clausola (9), quindi scelgo $\mathcal{I}(d) = \mathsf{True}$ e applico la unit propagation calcolando $\Phi|_{\neg a,d}$ che contiene l'unica clausola:

$$\neg b \vee \neg c \tag{10}$$

- $\Phi|_{\neg a,d}$ non contiene nessuna clausola unitaria e quindi scelgo un letterale che appare in $\Phi|_{\neg a,d}$ e gli do un valore di verità. Per esempio scelgo di assegnare $\mathcal{I}(b) = \mathsf{False}$ e quindi non potrà essere vero, e l'unico modo per rendere vera la clausola. Chiaramente questa scelta è dettata dal fatto che $\Phi|_{\neg a,d}$ contiene una sola clausola, e per soddisfarla basta che scelga di rendere vero un letterale che vi appartiene.
- Calcolo $\Phi_{\neg a,d,\neg b}$ e ottengo l'insieme vuoto di clausole. Ne concluso che $\Phi$ è soddisfacibile. Dalla procedura DPLL ho ottenuto che $a$, $b$ e $d$ devono essere assegnate rispettivamente a $\mathsf{False}$, $\mathsf{False}$ e $\mathsf{True}$, mentre non ho nessuna informazione su come assegnare $c$. Questo significa che $c$ può essere assegnato indistintamente a vero o a falso, e otterrò comunque un modello per $\Phi$. Quindi un modello per $\Phi$ è il seguente

$$\mathcal{I}(a) = \mathsf{False},\ \mathcal{I}(b) = \mathsf{False},\ \mathcal{I}(c) = \mathsf{True¡},\ \mathcal{I}(b) = \mathsf{True}$$

**Esercizio 3** (Soundness). **[6 points]** Dimostrare la correttezza della seguente regola del tableau proposizionale:

$$\frac{\phi \supset \psi}{\neg\phi \mid \psi}$$

**Risposta.** see slides

# First Order and Modal Logic

**Esercizio 4** (Reasoning first order)**. [6 points]** Considera le seguenti proprieta della relazione binaria $R$

| | |
|---|---|
| $R$ **è riflessiva** | $\forall x R(x,x)$ |
| $R$ **è transitiva** | $\forall xyz(R(x,y) \wedge R(y,z) \supset R(x,z))$ |
| $R$ **è simmetrica** | $\forall xy(R(x,y) \supset R(y,x))$ |
| $R$ **è eucledea** | $\forall xyz(R(x,y) \wedge R(x,z) \supset R(y,z))$ |

Mostrare con il tableaux che se $R$ è riflessiva ed eucledea allora è anche simmetrica; e che se $R$ è transitiva e simmatrica allora è anche euclidea.

**Risposta.**

$R$ **Riflessiva** $\wedge$ $R$ **euclidea** $\supset$ $R$ **simmetrica**

$$\neg(\forall x R(x,x) \wedge \forall xyz(R(x,y) \wedge R(x,z) \supset R(y,z)) \supset \forall xy(R(x,y) \supset R(y,x)))$$
$$|$$
$$\forall x R(x,x) \wedge \forall xyz(R(x,y) \wedge R(x,z) \supset R(y,z))$$
$$|$$
$$\neg \forall xy(R(x,y) \supset R(y,x))$$
$$|$$
$$\neg(R(a,b) \supset R(b,a))$$
$$|$$
$$R(a,b)$$
$$|$$
$$\neg R(b,a)$$
$$|$$
$$\forall x R(x,x)$$
$$|$$
$$\forall xyz(R(x,y) \wedge R(x,z) \supset R(y.z))$$
$$|$$
$$R(a,a)$$
$$|$$
$$R(a,b) \wedge R(a,a) \supset R(b,a)$$

$$\begin{array}{ccc} \multicolumn{2}{c}{\neg(R(a,b) \wedge R(a,a))} & R(b,a) \\ & & | \\ \neg R(a,b) & \neg R(a,a) & \times \\ | & | & \\ \times & \times & \end{array}$$

**$R$ transitiva $\wedge$ $R$ symmetrica $\supset$ $R$ euclidea**

$$
\begin{array}{c}
\neg(\forall xyz(R(x,y) \wedge R(y,z) \supset R(x,z)) \wedge \forall xy(R(x,y) \supset R(y,x)) \supset \forall xyz(R(x,y) \wedge R(x,z) \supset R(y,z))) \\
| \\
\forall xyz(R(x,y) \wedge R(y,z) \supset R(x,z)) \wedge \forall xy(R(x,y) \supset R(y,x)) \\
| \\
\neg\forall xyz(R(x,y) \wedge R(x,z) \supset R(y,z)) \\
| \\
\neg(R(a,b) \wedge R(a,c) \supset R(b,c)) \\
| \\
R(a,b) \wedge R(a,c) \\
| \\
\neg R(b,c) \\
| \\
R(a,b) \\
| \\
R(a,c) \\
| \\
R(a,b) \supset R(b,a)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
\neg R(a,b) & R(b,a) \\
| & | \\
\times & R(b,a) \wedge R(a,c) \supset R(b,c) \\
 & | \\
 & \neg(R(b,a) \wedge R(a,c))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
\neg R(b,a) & \neg R(a,c) \\
| & | \\
\times & \times
\end{array}
$$

**Esercizio 5** (Logica del prim'ordine: Interpretazioni)**.** [**6 points**] Considera il linguaggio del primo ordine contenente le due costanti $a$ e $b$ la funzione unaria $f$ e quella binaria $g$, ed il predicato unario $P$ ed il predicato binario $Q$

1. Quanti elementi contiene l'universo di herbrand: 6, 8, o infiniti?
2. Quali sono le istanze ground della formula $\forall xyQ(x, g(y, b))$?
3. Sia $\mathcal{H}$ una interpretazione di herbrand tale che $\mathcal{H} \models P(a)$, $\mathcal{H} \models P(f(a))$, $\mathcal{H} \models P(f(f(a)))$, $\ldots \mathcal{H} \models P(f(f \ldots f(a) \ldots))$. Posso concludere che $\mathcal{H} \models \forall xP(f(x))$. ?
4. Sia $\mathcal{H}$ una interpretazione tale che $\mathcal{H} \models Q(t_1, t_2)$ per ogni coppia di termini ground $t_1$ e $t_2$ posso concludere che $\mathcal{H} \models \forall xyQ(x, y)$.
5. Dire se esiste un'interpretazione di Herbrand che soddisfa la formula $\forall xyP(f(x)) \wedge \neg P(g(x, y))$. Se si descrivila
6. Dire se esiste un'interpretazione di Herbrand che soddisfa la formula $\forall xy(Q(f(x), y) \wedge \neg Q(y, g(x, x)))$, e se esiste decrivila.

**Risposta.**

1. L'universo di Herbrand contiene infiniti oggetti. Tutti i termini che si possono costruire a partire da $a$ e $b$ applicando le funzioni $f$ e $g$: cioe'

$$\left\{\begin{array}{l}
a,\ b, \\
f(a),\ f(b),\ g(a,a),\ g(a,b),\ g(b,a),\ g(b,b), \\
f(f(a)),\ f(f(b)),\ f(g(a,a)),\ f(g(a,b)),\ f(g(b,a)),\ f(g(b,b)) \\
g(f(a),f(a)),\ g(f(a),f(b)),\ g(f(a),g(a,a)),\ g(f(a),g(a,b)),\ g(f(a),g(b,a)),\ g(f(a),g(b,b)), \\
g(f(b),f(a)),\ g(f(b),f(b)),\ g(f(b),g(a,a)),\ g(f(b),g(a,b)),\ g(f(b),g(b,a)),\ g(f(b),g(b,b)), \\
\ldots
\end{array}\right\}$$

2. istanze ground della formula $\forall xyR(x, g(y, b))$ sono tutte le formue che si possono ottenere sostituendo $x$ e $y$ in $R(x, g(y, b))$ con due termini qualsiasi dell'universo di Herbrand.
3. No
4. Si
5. No
6. Si

**Esercizio 6** (Modal logics). **[6 points]** Dato lo schema di assioma $(4)$: $\Box\phi \supset \Box\Box\phi$ dimostrare che

$$\mathcal{F} \models (4) \text{ se e solo se } \mathcal{F} \text{ è un frame transitivo.}$$

**Risposta. Soundness:** Let $\mathcal{M}$ be a model on a transitive frame $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ and $w$ any world in $W$. We prove that $\mathcal{M}, w \models \Box\phi \supset \Box\Box\phi$.

1. Suppose that $\mathcal{M}, w \models \Box\phi$ (Hypothesis).
2. We have to prove that $\mathcal{M}, w \models \Box\Box\phi$ (Thesis)
3. From the satisfiability condition of $\Box$, this is equivalent to prove that for all world $w'$ accessible from $w$ $\mathcal{M}, w' \models \Box\phi$.
4. Let $w'$ be any world accessible from $w$. To prove that $\mathcal{M}, w' \models \Box\phi$ we have to prove that for all the world $w''$ accessible from $w'$, $\mathcal{M}, w'' \models \phi$.
5. Let $w''$ be a world accessible from $w'$, i.e., $w'Rw''$.
6. From the facts $wRw'$ and $w'Rw''$ and the fact that $R$ is transitive, we have that $wRw''$.
7. Since $\mathcal{M}, w \models \Box\phi$, from the satisfiability conditions of $\Box$ we have that $\mathcal{M}, w'' \models \phi$.
8. Since $\mathcal{M}, w'' \models \phi$ for every world $w''$ accessible from $w'$, then $\mathcal{M}, w' \models \Box\phi$.
9. and therefore $\mathcal{M}, w \models \Box\Box\phi$. (Thesis)
10. Since from (Hypothesis) we have derived (Thesis), we can conclude that $\mathcal{M}, w \models \Box\phi \supset \Box\Box\phi$.

**Completeness:** Suppose that a frame $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ is not transitive.

1. If $R$ is not transitive then there are three worlds $w, w', w'' \in W$, such that $wRw'$, $w'Rw''$ but not $wRw''$.
2. Let $\mathcal{M}$ be any model on $\mathcal{F}$, and let $\phi$ be the propositional formula $p$. Let $V$ the set $p$ true in all the worlds of $W$ but $w''$ where $p$ is set to be false.
3. From the fact that $w$ does not access to $w''$, and that $w''$ is the only world where $p$ is false, we have that in all the worlds accessible from $w$, $p$ is true.
4. This implies that $\mathcal{M}, w \models \Box p$.
5. On the other hand, we have that $w'Rw''$, and $w'' \not\models p$ implies that $\mathcal{M}, w' \not\models \Box\phi$.
6. and since $wRw'$, we have that $\mathcal{M}, w \not\models \Box\Box p$.
7. In summary: $\mathcal{M}, w \not\models \Box\Box p$, and $\mathcal{M}, w \models \Box P$; from which we have that $\mathcal{M}, w \not\models \Box p \supset \Box\Box p$.