Logica & Linguaggio: Logica di Primo Ordine

RAFFAELLA BERNARDI

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

P.ZZA VENEZIA, ROOM: 2.05, E-MAIL: BERNARDI@DISI.UNITN.IT

Contents

1. FATTO: Alberi di refutazione (tableaux)

Gli alberi di *refutazione* (tablaux) sono uno di questi:

> Si formi una lista di formule con tutte le premesse e la negazione della conclusione. Se si arriva a trovare un'interpretazione per la quale tale lista contiene tutte formule vere, allora quell'interpretazione mostra che esiste un controesempio: l'argomentazione non è valida (non è una conseguenza logica). Se non si riesce a trovare nessuna interpretazione che renda vera tale lista, allora la conclusione non è stata refutata, dunque l'argomentazione è valida.

$$\text{to prove } \{P_1, \ldots P_n\} \models C \quad W(P_1, \ldots P_n) \subseteq W(C)$$

$$\forall \mathcal{I}.\text{If } \mathcal{I}(P_1) = T, \ldots, \mathcal{I}(P_n) = T \text{ then } \mathcal{I}(C) = T$$

$$\text{try to prove } \{P_1, \ldots P_n\} \not\models C \quad W(P_1, \ldots P_n) \not\subseteq W(C)$$

$$\exists \mathcal{I} \text{ s.t. } \mathcal{I}(P_1) = T, \ldots, \mathcal{I}(P_n) = T \text{ and } \mathcal{I}(C) = F, \mathcal{I}(\neg C) = T$$

2. Conseguenza logica

$$\{P_1, \ldots P_n\} \models C$$

1. P_1 $[\mathcal{I}(P_1) = T]$
2. $\ldots$ $[\ldots]$
3. P_n $[\mathcal{I}(P_n) = T]$
4. $\neg C$ $[\mathcal{I}(C) = F]$

Se tutti i rami si chiudono (raggiungono una contraddizione), allora $\models$ è valido.

Se c'è almeno un ramo che non si chiude, quel ramo dà l'interpretazione che contraddice l'implicazione.

3. Formula

You are asked to prove whether ψ is a tautology by means of tableaux.

- If all branches of your tableaux are open, what do you conclude?

  ψ is satisfiable.

  Are you sure you cannot give a stronger answer, i.e. are you sure ψ is not a tautology?

  In order to check whether ψ is a tautology you have to look at $\neg\psi$.

  If $\neg\psi$ is unsatisfiable then ψ is also a tautology.

- If all branches close: ψ is unsatisfiable.

  Can you make a stronger claim?

  No this is already a strong result, there is no need to look at $\neg\psi$.

4. FATTO: Tableux for PL

$A \wedge B$ A B	$A \vee B$ $A \qquad B$	$A \to B$ $\neg A \qquad B$
$A \leftrightarrow B$ $A \wedge B \qquad \neg A \wedge \neg B$	$\neg\neg A$ A	$\neg(A \wedge B)$ $\neg A \qquad \neg B$
$\neg(A \vee B)$ $\neg A$ $\neg B$	$\neg(A \to B)$ A $\neg B$	$\neg(A \leftrightarrow B)$ $A \wedge \neg B \qquad \neg A \wedge B$

5. How far can we go with PL?

1. Casper is bigger than John
2. John is bigger than Peter
3. Therefore, Casper is bigger than Peter.

Questions:

How would you formalize this inference in PL?

What do you need to express that cannot be expressed in PL?

Answer:

You need to express: “relations” (is bigger than) and “entities” (Casper, John, Peter)

5.1. Inference

1. Bigger(casper,john)
2. Bigger(john,peter)
3. Therefore, Bigger(casper,peter)

Question: Do you still miss something?

5.2. Exercise: Predicates and entities

Formalize:

- John is bigger than Peter or Peter is bigger than John
- If Raffaella is speaking, then Rocco is listening
- If Peter is laughing, than John is not biting him.

Predicates represent sets of objects (entities). For example:

> "is listening" is the set of all those entities that are listening —i.e. all of you!

5.3. Housing lottery problem

Housing lotteries are often used by university housing administrators to determine which students get first choice of dormitory rooms.

Consider the following problem:

1. Bob is ranked immediately ahead of Jim.
2. Jim is ranked immediately ahead of a woman who is a biology major.
3. Lisa is not near to Bob in the ranking.
4. Mary or Lisa is ranked first.

Is it true that Jim is immediately ahead of Lisa and Lisa is the last of the ranking and Mary is the first?

Questions:
How would you formalize the problem in PL?

What do you need to express that you cannot express in PL?

It would be handy to say, e.g. that *there exists* a woman who is a biology major.

5.4. Graph Coloring Problem

Formalization of our general knowledge about graphs and color assignments.

First of all let $1, 2 \ldots n$ be our vertices, and B (blue), R (red), G (green) ... be our colors, and let $B_i, C_{i,j}$ stand for "i is of color B" and "i is connected to j".

- **Symmetry of edges**: $C_{1,2} \leftrightarrow C_{2,1}, \ldots$ (so for the other connected vertices)
- **Coloring of vertices**: $B_1 \vee G_1 \vee R_1 \ldots$ (so for the colors and for the other vertices)
- **Uniqueness of colors per veritex**: $B_1 \leftrightarrow (\neg G_1 \wedge \neg R_1) \ldots$ (so for the other vertices)

Secondly, we have an explicitly given constraint: the coloring function has to be such that no two connected vertices have the same color:

- **Explicit Constraint**: $C_{1,2} \rightarrow (B_1 \rightarrow \neg B_2) \wedge (R_1 \rightarrow \neg R_2) \wedge (G_1 \rightarrow \neg G_2) \ldots$ (so for the other colors and the other vertices)

Question: Which could be a way to express these properties of colors and edges in a "few words"?

We could speak to properties that hold *for all* colors, or all vertices!

5.5. Syllogism

1. Some four-legged creatures are genus
2. All genus are herbivores
3. Therefore, some four-legged creatures are herbivores

Question:

What is the schema behind the reasoning? What you could not express in PL even if we add relations and entity?

1. Some F are G
2. All G are H
3. Therefore, some F are H

We still need *quantifiers* to express "some" and "all".

5.6. Quantifiers

Quantifiers like truth-functional operators ($\rightarrow, \neg, \vee, \wedge$) are logical operators; but instead of indicating relationships among sentences, they express relationships among the *sets* designated by predicates.

For example, statements like

> "All A are B" assert that the set A is a subset of the set B, $A \subseteq B$;

that is

> all the members of A are also members of B.

5.7. Quantifiers

Statements like

> "Some A are B" assert that the set A shares at least one member with the B $A \cap B \neq 0$;

Note, hence "Some A are B" is considered to be different from standard usage:

- at least one member
- it does not presuppose that "not all A are B"

5.8. Variables and Quantifiers

"All A are B" can be read as saying:

For all x, *if* x is A *then* x is B.

i.e. what we said before: all the members of A are also members of B, i.e A is included in B, $A \subseteq B$.

We write this as: $\forall x.A(x) \rightarrow B(x)$

"Some A are B" can be read as saying:

For some x, x is A *and* x is B.

i.e. what we said before: there exists at least a members of A that is also a members of B.

We write this as: $\exists x.A(x) \wedge B(x)$

5.9. Summing up: Motivations to move to FOL

- We can already do a lot with propositional logic.
- But it is unpleasant that we cannot access the *structure* of atomic sentences.
- Atomic formulas of propositional logic are *too atomic* – they are just statements which my be true or false but which have no internal structure.
- In *First Order Logic* (FOL) the atomic formulas are interpreted as statements about *relationships between objects*.

6. Linguaggio della Logica di Primo Ordine

Alfabeto L'alfabeto della logica proposizionale è costituito da:

- simboli per variabili (infiniti): $x_1, x_2, x_3, \ldots$
- simboli per costanti individuali (eventualmente nessuno): $a_1, a_2, \ldots$
- simboli per predicati (o relazioni), a ciascuno dei quali è associato il suo numero di argomenti: $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \ldots$
- simboli per funzioni, a ciascuno dei quali è associato un numero corrispondente al numero di argomenti: $f_1, g_1, f_2, g_2, \ldots$
- simboli di punteggiatura: "(", ")" e la virgola ","
- simboli per connettivi logici: $\neg$ (negazione), $\rightarrow$ (implicazione), $\leftrightarrow$ (se e solo se), $\wedge$ (e), $\vee$ (oppure)
- simboli per quantificatori: $\forall$ (quantificatore universale), $\exists$ (quantificatore esistenziale)

Termini: una costante individuale è un termine; una variabile è un termine; se $t_1, ..., t_n$ sono n termini e f è un simbolo per funzione n-aria allora $f(t_1, ..., t_n)$ è un termine. Nient'altro è un termine.

Formule ben formate Sono definite ricorsivamente partendo dalla definizione di formula atomica: una sequenza di simboli del tipo $A(t_1, \dots t_n)$, dove A è un simbolo per predicato n-ario e $t_1, \dots, t_n$ sono termini,

1. ogni formula atomica è una fbf.
2. se A e B sono fbf e x è una variabile allora sono fbf anche:
   - $\neg A$
   - $A \to B$
   - $A \leftrightarrow B$
   - $A \wedge B$
   - $A \vee B$
   - $\forall x A$
   - $\exists x A$
3. ninent'altro è una fbf.

6.1. Sottoformule, variabili libere e vincolate

Sottoformula è una stringa interna ad una fbf che è anch'essa una fbf. Ad esempio nella fbf: $\forall x(P_1(x) \wedge Q_1(y))$ le sottoformule sono

- $\forall x(P_1(x) \wedge Q_1(y))$
- $P_1(x) \wedge Q_1(y)$
- $P_1(x)$
- $Q_1(y)$

Quantificatori compaiono necessariamente davanti ad una sottoformula (che è detta il *campo d'azione* del quantificatore) e sono associati ad una variabile (quella che compare immediatamente dopo il simbolo $\forall$ o $\exists$ e sulla quale esprimono la quantificazione/la loro azione).

Variabili Una variabile all'interno di una formula si dice *libera* se non compare in nessuna sottoformula preceduta da un quantificatore associato a tale variabile. Altrimenti si dice *vincolata*. Nell'esempio precedente x vincolata mentre y è libera. Si chiama formula *chiusa* una fbf che non contenga variabili libere, formula *aperta* una che le contiene.