Logica & Linguaggio: Logica Proposizionale I

Raffaella Bernardi

Università degli Studi di Trento

P.zza Venezia, Room: 2.05, e-mail: bernardi@disi.unitn.it

Contents

1. Cosa abbiamo visto la scorsa volta

- Logica:
  - Linguaggio: sintassi, semantica
  - Ragionamento.
- Semantica
  - Significato frase = Valore di verità
  - Significato composizionale: connettivi vero-funzionali
  - Funzione di Valutazione (o Interpretazione): $\texttt{FORM} \rightarrow \{vero, falso\}$
- Ragionamento: $Premesse \models \alpha$ sse $W(Premesse) \subseteq W(\alpha)$

Oggi introduciamo il linguaggio proposizionale (PL:Propositional Logic).

2. Propositional Logic: Basic Ideas

Statements:

The elementary building blocks of propositional logic are *atomic statements* that cannot be decomposed any further: *propositions*.

E.g.,

- "The box is red"
- "The proof of the pudding is in the eating"
- "It is raining"

and logical connectives "and", "or", "not", by which we can build **propositional formulas**.

3. Linguaggio della Logica Proposizionale

Alfabeto L'alfabeto della logica proposizionale è costituito da:

- Un insieme numerabile di simboli di proposizione: $p, q, r, \ldots$
- I simboli dei connettivi logici: $\neg$ (NOT), $\wedge$ (AND), $\vee$ (OR), $\rightarrow$ (implicazione), $\leftrightarrow$ (doppia implicazione).
- Le parentesi: (,) (hanno per lo più lo scopo di disambiguare il linguaggio)

Formule ben formate Sono definite ricorsivamente

1. un simbolo di proposizione è una fbf
2. se A è una fbf lo è anche $\neg A$
3. se A ed B sono fbf allora lo sono anche $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ e $(A \rightarrow B)$
4. niente altro è una fbf

4. From English to Propositional Logic

Eg. If you don't sleep then you will be tired.

Keys: p = you sleep, q= you will be tired. Formula: $\neg p \to q$.

Exercise I:

1. If it rains while the sun shines, a rainbow will appear
2. Charles comes if Elsa does and the other way around
3. If I have lost if I cannot make a move, then I have lost.

1. $(rain \wedge sun) \to rainbow$
2. $elsa \leftrightarrow charles$
3. $(\neg move \to lost) \to lost$

Use: `http://www.earlham.edu/~peters/courses/log/transtip.htm`

5. Semantics: Intuition

- Atomic propositions can be *true* `T` or *false* `F`.
- The truth value of formulas is determined by the truth values of the atoms (*truth value assignment* or *interpretation*).

Example: $(a \vee b) \wedge c$: If a and b are false and c is true, then the formula is not true.

6. Funzione di Valutazione

Le funzioni di valutazione (o interpretazione), indicata con $\mathcal{I}$, potranno assegnare vero (T) o falso (F) alle formule atomiche, ma per le formule complesse saranno vincolate dalle seguenti condizioni. Per qualsiasi formula P, Q di L:

a. $\mathcal{I}(\neg P) = T$ sse $\mathcal{I}(P) = F$

b. $\mathcal{I}(P \wedge Q) = T$ sse $\mathcal{I}(P) = T$ e $\mathcal{I}(Q) = T$

c. $\mathcal{I}(P \vee Q) = F$ sse $\mathcal{I}(P) = F$ e $\mathcal{I}(Q) = F$

d. $\mathcal{I}(P \rightarrow Q) = F$ sse $\mathcal{I}(P) = T$ e $\mathcal{I}(Q) = F$

e. $\mathcal{I}(P \leftrightarrow Q) = F$ sse $\mathcal{I}(P) = \mathcal{I}(Q)$

7. Truth Tables

	ϕ	$\neg\phi$
$\mathcal{I}_1$	T	F
$\mathcal{I}_2$	F	T
		(1)

	ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$
$\mathcal{I}_1$	T	T	T
$\mathcal{I}_2$	T	F	F
$\mathcal{I}_3$	F	T	F
$\mathcal{I}_4$	F	F	F
			(1)

	ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$
$\mathcal{I}_1$	T	T	T
$\mathcal{I}_2$	T	F	T
$\mathcal{I}_3$	F	T	T
$\mathcal{I}_4$	F	F	F
			(1)

	ϕ	ψ	$\phi \rightarrow \psi$
$\mathcal{I}_1$	T	T	T
$\mathcal{I}_2$	T	F	F
$\mathcal{I}_3$	F	T	T
$\mathcal{I}_4$	F	F	T
			(1)

8. Model

A model consists of two pieces of information:

- which collection of atomic propositions we are talking about (*domain*, D),
- and for each formula which is the appropriate *semantic value*, this is done by means of a function called *interpretation function* ($\mathcal{I}$).

Thus a model $\mathcal{M}$ is a pair: $(D, \mathcal{I})$.

9. Tautologies and Contradictions

Build the truth table of $p \wedge \neg p$.

It's a *contradiction*: always false.

Build the truth table of $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$.

It's a *tautology*: always true.