# Logica & Linguaggio, PL: Chi, cosa, perchè

RAFFAELLA BERNARDI

UNIVERSITÀ DI TRENTO

P.ZZA VENEZIA, ROOM: 2.05, E-MAIL: BERNARDI@DISI.UNITN.IT

# Contents

# 1. Fino ad ora

Nelle lezioni precedenti abbiamo introdottto la logica proposizionale come oggi è presentata ed usata.

Oggi vedremo quando e da chi sono stati introdotti le idee base, e introduciamo un secondo sistema di dimostrazione in alternativa alle tavole di verità.

# 2. Usi e motivazioni della Logica

1. Sofisti (fine V sec. a.C): volevano un sistema di regole per determinare con sicurezza il vincitore di dibattiti.
2. Aristotele (384–322 a.C): sillogismi
3. Boole (metà 19 secolo): Logica Algebrica, regole di inferenza per deterimare le conclusioni di premesse in algebra.
4. Frege (inizio XX secolo) Logica matematica.
5. Montague (metà XX secolo) Logica e strutture linguistiche
6. Oggi: Logica ed Informatica, Logica e Matematica, Logica e Filosofia, Logica e Linguaggio, Logica e Scienze Sociali, . . . .

## 2.1. Sofisti: Logica & Retorica

La sofistica: corrente filosofica sviluppatasi in Grecia a partire dalla seconda metà del V secolo A.C.

Le *tecniche dialettiche dell'argomentare* (cioè dimostrare, attraverso passaggi logici rigorosi, la verità di una tesi) e del confutare erano già state utilizzate da Zenone all'interno della scuola eleatica, ma fu soprattutto con i sofisti che esse si affermarono e si affinarono.

Problemi Il linguaggio naturale è ambiguo e porta a paradossi.

## 2.2. Aristotele

Aristotele IV secolo A.C. teorizza il ragionamento logico *nella forma rigorosamente deduttiva del sillogismo*. Attraverso il sillogismo, la logica permette di ordinare in gruppi o categorie tutto ci che si trova in natura, a condizione però di partire da premesse vere e certe:

> Tutti gli uomini sono mortali;
>
> Socrate è uomo;
>
> Dunque, Socrate è mortale.

**Proposizioni** Aristotle si interessa solo alle proposizioni affermative e negative, universali e particolari. Combinando questi tipi di proposizioni, risultano esserci quattro tipi di proposizioni-modello per il filosofo: universale affermativa, universale negativa, particolare affermativa, particolare negativa.

## 2.3. Ambiguità e Paradossi

Il linguaggio naturale è altamente ambiguo.

Paradosso del mentitore data una proposizione autonegante come “Questa frase è falsa”, nessuno riuscirà mai a dimostrare se tale affermazione sia vera o falsa;

- se infatti fosse vera, allora la frase non sarebbe veramente falsa (la verità della proposizione invalida la falsità espressa nel contenuto della proposizione).
- se invece la proposizione fosse falsa, allora il contenuto si capovolgerebbe (è come se dicesse “Questa frase  vera”) quando abbiamo appena affermato il contrario.

Per superare i paradossi e le ambiguità del linguaggio naturale si sviluppò un *linguaggio formale/simbolico*.

# 3. Stoici: Logica Proposizionale

La *Logica Proposizionale* fu elaborata dagli Stoici (in particolare, Crisippo (III sec. a.C.)). Il termine di *logica* (logiké), "scienza del logos", venne messo in uso proprio dagli stoici:

> "La ricerca logica non ha nè la stessa materia nè lo stesso fine [delle altre parti della filosofia]: la sua materia sono i ragionamenti (lógoi), il fine la conoscenza dei metodi dimostrativi, e tutte le altre indagini concorrono a sviluppare una dimostrazione scientifica. Dunque non può essere messa sotto nessuna delle due altre parti della filosofia. [..] Dunque non è una semplice sezione della filosofia [etica o fisica], ma la sua terza parte" (SVF II.49 = FDS 28).

## 3.1. Stoici: contributi

1. le relazioni logiche tra proposizioni complesse formate con i connettivi ‘non’, ‘e’, ‘o’ e ‘se ... allora’;

2. identificarono alcune basilari forme d’inferenza (come ad esempio il *modus ponens*: “Se è giorno c’è luce; ma è giorno; quindi, c’è luce”, e il sillogismo *disgiuntivo*: “È giorno o è notte; non è notte; quindi è giorno”).

3. svilupparono inoltre la logica modale, e

4. condussero attente riflessioni sulla natura della verità, dei significati, e del rapporto tra antecedente e conseguente nei condizionali.

Info su: http://www.filosofico.net/stoici2.htm#par2

# 4. Tavole di Verità

Gli stoici avevano definito il valore di verità delle formule complesse in base ai connettivi logici e al valore di verità delle formule da loro connesse.

Wittgeinstein fu colui che diede l'attuale rappresentazione delle tavole di verità nel "Tractatus Logico-Philosophicus" (1922).

- Proposizioni elementari:
  - sono immagini di stati di cose
  - Una proposizione elementare è vera se lo stato di cose che essa rappresenta sussiste, falsa altrimenti.
  - Il sussistere di uno stato di cose è un fatto contingente
- Proposizioni complesse:
  - sono funzioni di verità delle proposizioni elementari in esse contenute.
- La logica consta solo di tautologie, cioè sono vere comunque stiano le cose; la loro verità è indipendente dai fatti del mondo.

# 5. Significato: Comprendere, Verificare, Usare

“Primo” Wittgnenstein “Comprendere una proposizione vuol dire sapere che accada se essa è vera”. (1922)

Neo-positivisti (e.g. Carnap) Si comprende un enunciato se si è in grado di determinare la sua verità o falsità rispetto all’esperienza, cioè di verificarlo empiricamente. (Anni Trenta)

“Secondo” Wittgnestein Comprendo una proposizione se so come usarla.

Per approfondimenti, si veda: Quine, Davidson, Dummett, Putman, Kripke.

## 5.1. Alfred Tarski

È stato un matematico, logico e filosofo polacco trasferitosi negli Stati Uniti (Varsavia, 14 gennaio 1902  Berkeley, 26 ottobre 1983).

Wikipedia gossips Nato da famiglia ebrea Teitelbaum, Alfred, uscito dalla scuola secondaria, dopo un breve servizio militare nell'esercito polacco, nel 1918 si iscrive all'Università di Varsavia con l'intenzione di studiare biologia. Gli accade tuttavia di seguire un corso di logica tenuto da Lesniewski e questi lo convince a dedicarsi alla matematica; Nel 1923, nel clima di acceso nazionalismo che si era creato in Polonia, si converte al cattolicesimo e cambia il suo cognome.

Connessioni interessanti Nel 1930 si reca a Vienna dove prende contatto con i membri del Circolo di Vienna; in questa città sarà ancora per qualche mese nel 1935. In questo periodo pubblica quello che molti ritengono il suo lavoro più importante. Dopo aver cercato invano di ottenere un posto di professore all'Università di Lvov, Tarski nel 1939, in seguito ad un invito sostenuto da Willard Van Orman Quine, insegna all'Università di Harvard e decide di vivere negli Stati Uniti.

## 5.2. Tarski: Linguaggio oggetto vs. Meta-linguaggio

Nell'articolo del 1933 (versione polacca), 1935 (traduzione tedesca), 1956 (trad. inglese) introduce la definizione matematica della verità per i linguaggi formali. Distingue tra:

1. *linguaggio oggetto*: il linguaggio di cui si stanno studiando le proprietà.
2. *meta linguaggio*: il linguaggio che viene usato per parlare del linguaggio oggetto.

$$\underbrace{\text{snow is white}}_{\text{ling. ogg.}} \quad \text{è vero se e solo se} \quad \underbrace{\text{la neve è bianca}}_{\text{meta-ling}}$$

Se non si distingue il linguaggio oggetto dal metalinguaggio, lo schema della Convenzione-V genera paradossi.

## 5.3. Tarski: Convenzione-T

Convenzione-T Ogni teoria della verità è formalmente corretta e materialmente adeguata se si possono derivare tutti i bicondizionali del tipo:

> L'enunciato $N$ è vero se e solo se $E$

E.g. "$I(A \wedge B)$" è vero sse $I(A)$ e $I(B)$.

La definizione formale proposta da Tarski permise anche di chiarire il concetto di *conseguenza logica*.

# 6. Conseguenza logica

Abbiamo visto fino ad ora:

$$KB \models \alpha \quad \text{iff} \quad W(Premesse) \subseteq W(\alpha)$$

Premesse *implicano* $\alpha$ sse $\alpha$ è **vera** per tutte le interpretazioni per le quali tutte le premesse sono vere.

Le tavole di verità non sono l'algoritmo più efficiente. Esistono altre procedure più veloci. Gli alberi di *refutazione* (tablaux) sono uno di questi:

> Si formi una lista di formule con tutte le premesse e la negazione della conclusione. Se si arriva a trovare un'interpretazione per la quale tale lista contiene tutte formule vere, allora quell'interpretazione mostra che esiste un controesempio: l'argomentazione non è valida (non è una conseguenza logica). Se non si riesce a trovare nessuna interpretazione che renda vera tale lista, allora la conclusione non è stata refutata, dunque l'argomentazione è valida.

Si veda Varzi, pp. 69-80 per approfondimenti.

# 7. Sistema di dimostrazione

Un sistema di dimostrazione risolve il problema con un risposta: SI o NO senza far riferimento esplicito ai valori di verità delle formule, ma solo alla loro sintassi.

$$KB \vdash_i \alpha$$

$\alpha$ deriva dall'insieme delle formule $KB$ attraverso la procedura $i$

Correttezza La procedura $i$ è corretta

se ogni volta che $i$ *deriva* $\alpha$ da un insieme di formule KB ($KB \vdash_i \alpha$), allora KB *implica* $\alpha$ ($KB \models \alpha$):

$$KB \models \alpha \quad \Leftarrow \quad KB \vdash_i \alpha$$

Completezza la procedura $i$ è completa se ogni volta che un insieme di formule KB *implica* ($\models$) una frase $\alpha$ ($KB \models \alpha$), allora $\alpha$ è *derivata* da $KB$ ($KB \vdash_i \alpha$):

$$KB \models \alpha \quad \Rightarrow \quad KB \vdash_i \alpha$$

# 8. Deduzione Naturale

Il sistema di deduzione naturale è un sistema di dimostrazione.

Consiste di regole di inferenza: regole di eliminazione ed regole di introduzione per ogni operatore logico.

$$\frac{P \wedge Q}{Q} \wedge E^r \qquad \frac{P \quad Q}{P \wedge Q} \wedge I$$

$$\frac{P \to Q \quad P}{Q} \to E \qquad \frac{\begin{array}{c}[P]\\ \vdots\\ Q\end{array}}{P \to Q} \to I$$

Similmente, per gli altri operatori.

# 9. Tavole di verità vs. Deduzione Naturale

Dimostrare le seguenti derivazioni usando (a) le tavole di verità e (b) le inferenze logiche della DN.

1. $P, P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, R \rightarrow (\neg S \wedge T) \vdash \neg S$
2. $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$
3. $P \rightarrow Q, Q \vdash P$

# 10. Decidibilità e Complessità

Decidibile Il problema di stabilire se una formula del linguaggio proposizionale è soddisfacibile è un problema decidibile: si può risolvere considerando tutte le possibili combinazioni di valutazioni sui simboli proposizionali e calcolando il corrispondente valore di verità della formula composta sfruttando le proprietà della funzione di valutazione.

Complessità problema appartiene alla classe dei problemi NP-completi, cioè problemi non deterministici a tempo polinomiale. Si può trovare un algoritmo che lo risolve - velocemente.

# 11. Varie

- Esercizi su formalizzazioni date per casa?
- Saggi di Tarski online.