

# Logica & Linguaggio: Esercizi

## Logica Proporzionale

Università di Trento, Facoltà di Lettere e Filosofia

### Esercizio 1: Linguaggio

Per ognuna delle seguenti espressioni, determinare se è una formula ben formata di PL.

1.  $\neg(\neg p \vee q)$
2.  $p \vee (q)$
3.  $(p \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow q)$
4.  $(p \vee q \wedge r)$
5.  $\neg p \wedge \neg\neg q$
6.  $\neg \wedge p$

### Esercizio 2: Alberi di costruzione

(a) Disegnare l'albero di costruzione delle formule  $(p \leftrightarrow r) \vee \neg q$  e  $p \leftrightarrow (r \vee \neg q)$ . Dare per entrambe le formule le loro sottoformule.

(b) Classificare ciascuna delle seguenti frasi come formule atomiche, negazione, congiunzione, disgiunzione, implicazione, o equivalenza.

1.  $p \rightarrow q$
2.  $\neg p$
3.  $p$
4.  $(p \vee q) \wedge (p \vee q)$
5.  $\neg(p \rightarrow q)$
6.  $\neg(p \wedge q) \wedge \neg r$
7.  $p \rightarrow (q \wedge \neg r)$

(c) Usando le parentesi, dare tutte le formule che possono essere costruite dalla seguente sequenza di simboli:  
 $p \wedge \neg q \rightarrow r$ .

### Esercizio 3: Tavole di Verità

Costruire le tavole di verità delle seguenti formule:

1.  $\neg\neg A$
2.  $A \wedge (B \wedge \neg A)$
3.  $(A \rightarrow B) \rightarrow \neg B$

### Esercizio 4: Tautologie

Quali delle formule seguenti sono tautologie?

1.  $A \rightarrow A$
2.  $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
3.  $(B \rightarrow A) \rightarrow A$
4.  $\neg\neg A \rightarrow A$

### Esercizio 5: Equivalenza

Mostrare che le formule seguenti sono equivalenze.

1.  $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
2.  $A \wedge (A \vee B) \equiv A$
3.  $A \wedge (\neg A \vee B) \equiv A \wedge B$

### Esercizio 6: Traduzione dall'Italiano a PL

Tradurre le seguenti frasi inglesi in logica proposizionale. Cercare di conservare il più possibile la struttura della frase e dare le chiavi della traduzione.

Eg. If you don't sleep then you will be tired.

Chiavi:  $p$  = you sleep,  $q$  = you will be tired. Formula:  $\neg p \rightarrow q$ .

1. If it rains while the sun shines, a rainbow will appear
2. Charles comes if Elsa does and the other way around
3. Johan comes just when Peter stays at home
4. We are going, unless it is raining
5. Charles and Elsa are brother and sister or nephew and niece
6. If I have lost if I cannot make a move, then I have lost.

# Solutions

## 0.1 Esercizio : Linguaggio

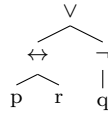
1. Si.
2. No, ma  $p \vee q$  è fbf.
3. Si.
4. No, ma  $(p \vee q) \wedge r$  e  $p \vee (q \wedge r)$  sono fbf.
5. Si.
6. No.

## 0.2 Esercizio : Construction trees

(a)

- $(p \leftrightarrow r) \vee \neg q$ .

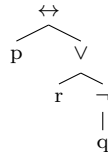
**Construction Tree**



**Subformula:**  $p, r, q, \neg q, p \leftrightarrow r, (p \leftrightarrow r) \vee \neg q$ .

- $p \leftrightarrow (r \vee \neg q)$ .

**Construction Tree**



**Subformula:**  $p, r, q, \neg q, r \vee \neg q, p \leftrightarrow (r \vee \neg q)$ .

(b)

1. implication
2. negation
3. atomic formula
4. conjunction
5. negation
6. conjunction
7. implication

(c) 1.  $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$ , 2.  $p \wedge (\neg q \rightarrow r)$ , 3.  $p \wedge \neg(q \rightarrow r)$ .

### 0.3 Esercizio : Tavole di Verità

1.  $\neg\neg A$

|     |        |        |     |
|-----|--------|--------|-----|
| $A$ | $\neg$ | $\neg$ | $A$ |
| T   | T      | F      |     |
| F   | F      | T      | (1) |

2.  $A \wedge (B \wedge \neg A)$

|     |     |     |          |      |          |        |      |
|-----|-----|-----|----------|------|----------|--------|------|
| $A$ | $B$ | $A$ | $\wedge$ | $(B$ | $\wedge$ | $\neg$ | $A)$ |
| T   | T   |     | F        |      | F        | F      |      |
| T   | F   |     | F        |      | F        | F      |      |
| F   | T   |     | F        |      | T        | T      |      |
| F   | F   |     | F        |      | F        | T      | (1)  |

3.  $(A \rightarrow B) \rightarrow \neg B$

|     |     |      |               |      |               |        |     |
|-----|-----|------|---------------|------|---------------|--------|-----|
| $A$ | $B$ | $(A$ | $\rightarrow$ | $B)$ | $\rightarrow$ | $\neg$ | $B$ |
| T   | T   |      | T             |      | F             | F      |     |
| T   | F   |      | F             |      | T             | T      |     |
| F   | T   |      | T             |      | F             | F      |     |
| F   | F   |      | T             |      | T             | T      | (1) |

### 0.4 Esercizio : Tautologie

1.  $A \rightarrow A$ . Tautologia.

|     |     |               |     |
|-----|-----|---------------|-----|
| $A$ | $A$ | $\rightarrow$ | $A$ |
| T   |     | T             |     |
| F   |     | T             | (1) |

2.  $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ . Tautologia.

|     |     |     |               |      |               |      |
|-----|-----|-----|---------------|------|---------------|------|
| $A$ | $B$ | $A$ | $\rightarrow$ | $(B$ | $\rightarrow$ | $A)$ |
| T   | T   |     | T             |      | T             |      |
| T   | F   |     | T             |      | T             |      |
| F   | T   |     | T             |      | F             |      |
| F   | F   |     | T             |      | T             | (1)  |

3.  $(B \rightarrow A) \rightarrow A$

|     |     |      |               |      |               |     |
|-----|-----|------|---------------|------|---------------|-----|
| $A$ | $B$ | $(B$ | $\rightarrow$ | $A)$ | $\rightarrow$ | $A$ |
| T   | T   |      | T             |      | T             |     |
| T   | F   |      | T             |      | T             |     |
| F   | T   |      | F             |      | T             |     |
| F   | F   |      | T             |      | F             | (1) |

4.  $\neg\neg A \rightarrow A$ . Tautologia.

|     |        |        |     |               |     |
|-----|--------|--------|-----|---------------|-----|
| $A$ | $\neg$ | $\neg$ | $A$ | $\rightarrow$ | $A$ |
| T   | T      | F      |     | T             |     |
| F   | F      | T      |     | T             | (1) |

## 0.5 Esercizio : Equivalenze

1.  $A \rightarrow B$  and  $\neg A \vee B$ . Si

| $A$ | $B$ | $(A \rightarrow B)$ | $\neg A$ | $\vee B$ |
|-----|-----|---------------------|----------|----------|
| T   | T   | T                   | F        | T        |
| T   | F   | F                   | F        | F        |
| F   | T   | T                   | T        | T        |
| F   | F   | T                   | T        | T        |
|     |     | (1)                 |          | (2)      |

2.  $A \wedge (A \vee B)$  and  $A$ . Si.

| $A$ | $B$ | $A \wedge (A \vee B)$        |
|-----|-----|------------------------------|
| T   | T   | T                            |
| T   | F   | T                            |
| F   | T   | F                            |
| F   | F   | F                            |
|     |     | (1)                      (2) |

3.  $A \wedge (\neg A \vee B)$  and  $A \wedge B$ . Si

| $A$ | $B$ | $A \wedge (\neg A \vee B)$ | $A \wedge B$ |
|-----|-----|----------------------------|--------------|
| T   | T   | T                          | T            |
| T   | F   | F                          | F            |
| F   | T   | F                          | F            |
| F   | F   | F                          | F            |
|     |     | (1)                        | (2)          |

## 0.6 Esercizio: Traduzione

1.  $p$  = it rains,  $r$  = the sun shines,  $q$  = a rainbow will appear  
 $(p \wedge r) \rightarrow q$
2.  $p$  = Charles comes,  $q$  = Elsa comes  
 $(q \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow q)$  or  $(p \leftrightarrow q)$
3.  $p$  = Johan comes,  $q$  = Peter stays at home  
 $p \leftrightarrow q$
4.  $p$  = We are going,  $q$  = it rains  
 $\neg p \leftrightarrow q$
5.  $p$  = Charles and Elsa are brother and sister,  $q$  = Charles and Elsa are nephew and niece.  
 $p \vee q$
6.  $p$  = I can make a move,  $q$  = I have lost.  
 $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow q$