Informatica Generale 1 - Esercitazioni
Flowgraph, algebra di Boole e calcolo binario

Daniele Pighin
pighin@fbk.eu

FBK
Via Sommarive, 18 I-38050 Trento, Italy

February 27, 2008

Outline

Funzioni booleane: riepilogo

Scopo

Ricavare l'espressione di una variabile booleana (output) il cui valore di verità è funzione di altre variabili (input).

Procedimento

1. Capire il problema (semantica delle variabili di ingresso e di uscita);
2. Scrittura della tabella di verità.
   Per n variabili di input, le dimensioni della tabella sono $2^n \times n + 1$ (possibili combinazioni di input $\times$ numero di variabili [in + out]);
3. Scrittura della forma canonica (somma di prodotti) delle configurazioni di input che soddisfano l'output.

Esercizi

1. Siano a_2, a_1 e b_2, b_1 i bit che rappresentano due numeri interi positivi, rispettivamente A e B. Sia r una variabile booleana che vale 1 se e solo se $A > B$. Si scriva la forma canonica di r.
2. I signori A, B, C, D fanno parte di un consiglio d'amministrazione ed hanno, rispettivamente, partecipazioni azionarie del 40%, 25%, 9%, 26%. Descrivere in forma canonica la funzione che decide quando il CdA è in grado di approvare una mozione.
3. Un dispositivo ha quattro sensori di controllo booleani A, B, C, D. Scrivere la forma canonica della funzione che attiva il dispositivo se almeno tre dei sensori sono nello stesso stato.
4. Un climatizzatore ha 3 sensori: L verifica se è giorno (1) o notte (0); T se è caldo (1) o freddo (0); U se è umido (1) o secco (0). Scrivere la forma canonica della funzione che permette al climatizzatore di attivarsi quando è giorno e fa caldo oppure è notte e c'è aria secca.

Soluzione Es. 3

$$
\begin{array}{c|cccccccccccccccc}
A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
B & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
C & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
D & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\\
out & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
out &= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + \\
&+ \overline{A}BCD + A\overline{B}CD + AB\overline{C}D + ABC\overline{D} + ABCD
\end{aligned}
$$

Esercizio 2: osservazione

Problema

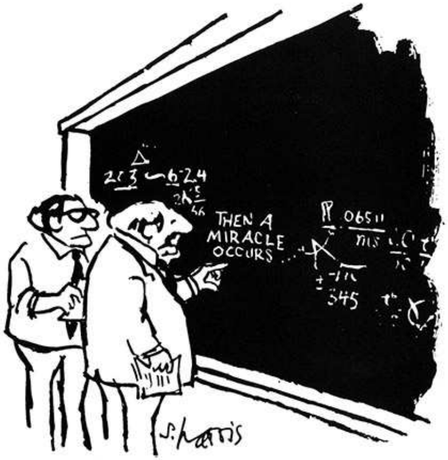
I signori A, B, C, D fanno parte di un consiglio d'amministrazione ed hanno, rispettivamente, partecipazioni azionarie del 40%, 25%, 9%, 26%. Descrivere in forma canonica la funzione che decide quando il CdA è in grado di approvare una mozione.

Domanda

Cosa potete osservare? Può essere semplificato il problema?

Algoritmo: definizione

Un **algoritmo** si può definire come un procedimento che consente di ottenere un **risultato atteso** eseguendo, in un **determinato ordine**, un insieme di **passi semplici** corrispondenti ad azioni scelte solitamente da un **insieme finito**.
(*fonte: Wikipedia*)



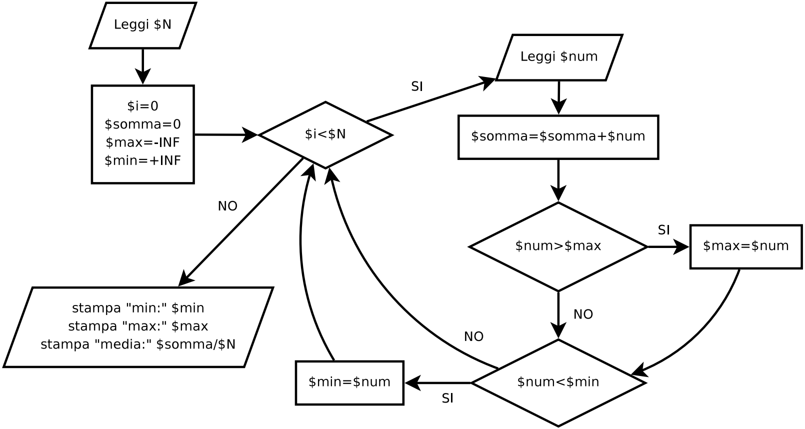
"I think you should be more explicit here in step two."

Esercizi

1. Leggi una sequenza di numeri naturali e stampane il minimo. La sequenza si ritiene interrotta se viene introdotto un numero negativo o nullo.
2. Leggi una sequenza di numeri naturali e stampane massimo, minimo e media.
3. Leggi un numero naturale N, quindi accetta in ingresso N numeri interi. Stampa massimo, minimo e media degli N interi letti.
4. Leggi un intero che rappresenta un anno e stampa “vero” se l’anno è bisestile, “falso” altrimenti. Un anno è bisestile se è divisibile per 4 ma non per 100 oppure è divisibile per 400.
5. Leggi una data (gg mm aaaa) e stampa il numero di giorni trascorsi dall’inizio dell’anno.

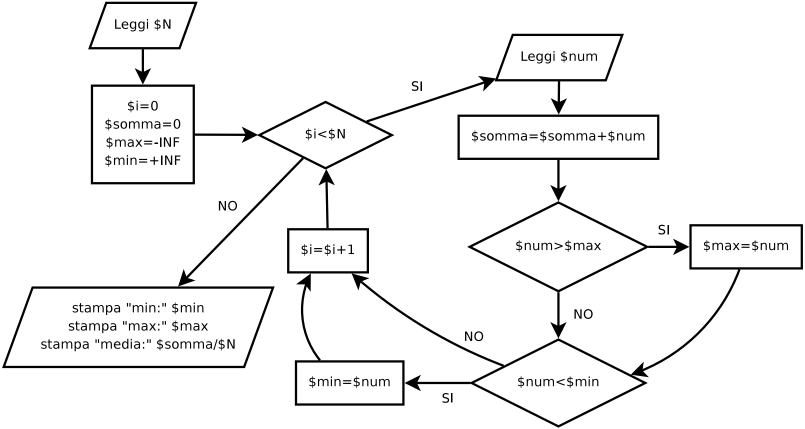
Soluzione Es. 3 (con errore)

Leggi un numero naturale N, quindi accetta in ingresso N numeri interi. Stampa massimo, minimo e media degli N interi letti.



Soluzione Es. 3 (corretta)

Leggi un numero naturale N, quindi accetta in ingresso N numeri interi. Stampa massimo, minimo e media degli N interi letti.



Rappresentazione dei numeri in base 2

*"Ci sono **10** tipi di persone nell'universo: quelli che capiscono il binario e quelli che no."*

Notazione posizionale (richiami)

Rappresentazione in base b del numero naturale N:

$$\begin{array}{ccl} N & = & (c_{m-1}c_{m-2}\ldots c_0)_b \\ & = & \sum_{i=0}^{m-1} c_i \cdot b^i \\ & \text{con} & c_i \in 0\ldots(b-1) \end{array}$$

Es:
$(111001)_2 = 1\cdot2^0+0\cdot2^1+0\cdot2^2+1\cdot2^3+1\cdot2^4+1\cdot2^5 = 1+8+16+32 = 57$

Massimo intero rappresentabile con m cifre binarie

$N_{max} = 2^m - 1$
(cioè: 2^m numeri distinti, tra cui lo zero)

Esercizi

Convertire:

1. $(101001101101)_2$ in base 10, 8 e 16
2. $(11001101111)_2$ in base 8
3. $(1101101101)_2$ in base 16
4. $(254)_{10}$ in base 2, 8 e 16
5. $(1023)_{10}$ in base 2, 8 e 16
6. $(ABF5)_{16}$ in base 2, 8 e 10

Soluzione Es. 1

Convertire $(101001101101)_2$ in base 10, 8 e 16.

Soluzione

base 10 espansione in sommatoria:
$(101001101101)_2 = (2^0 + 2^2 + 2^3 + 2^5 + 2^6 + 2^9 + 2^{11})_{10} = 2669_{10}$

base 8 raggruppamenti ($8 = 2^3$):
$(101001101101)_2 = (101\ 001\ 101\ 101)_2 = (5\ 1\ 5\ 5)_8$
verifica:
$(5\ 1\ 5\ 5)_8 = (5 \cdot 8^0 + 5 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^3)_{10} =$
$(5 + 5 \cdot 8 + 64 + 5 \cdot 512)_{10} = 2669_{10}$

base 16 raggruppamenti ($16 = 2^4$):
$(101001101101)_2 = (1010\ 0110\ 1101)_2 = (10\ 6\ 13)_{16} = (A\ 6\ D)_{16}$

Soluzione Es. 4

Convertire $(254)_{10}$ in base 2, 8 e 16.

Soluzione

base 2 divisioni successive:

$$
\begin{array}{ccccccl}
254 & : & 2 & = & 127 & + & \mathbf{0} \quad \leftarrow \text{bit meno significativo, } c_0 \\
127 & : & 2 & = & 63 & + & \mathbf{1} \\
63 & : & 2 & = & 31 & + & \mathbf{1} \\
31 & : & 2 & = & 15 & + & \mathbf{1} \\
15 & : & 2 & = & 7 & + & \mathbf{1} \\
7 & : & 2 & = & 3 & + & \mathbf{1} \\
3 & : & 2 & = & 1 & + & \mathbf{1} \\
1 & : & 2 & = & \mathbf{0} & + & \mathbf{1} \quad \leftarrow \text{bit più significativo, } c_7 \\
 & & & & \multicolumn{3}{l}{\uparrow \text{condizione di uscita}}
\end{array}
$$

$$\Rightarrow (254)_{10} = (11111110)_2$$

8 e 16 raggruppamenti.

Complemento a 2

Riepilogo

Permette di rappresentare numeri con segno. Vantaggi rispetto al complemento a 1 e alla notazione in modulo e segno:

- una sola rappresentazione per lo 0 (compattezza);
- facilita le operazioni di somma algebrica;
- non causa problemi di overflow (entro i limiti di rappresentabilità).

Con m cifre

Avendo a disposizione m cifre e quindi 2^m diverse combinazioni:

- 2^{m-1} per gli interi positivi e lo zero $\Rightarrow N_{max} = 2^{m-1} - 1$;
- 2^{m-1} per gli interi negativi $\Rightarrow N_{min} = -1 \cdot 2^{m-1}$;

Attenzione all'Overflow!

- Si hanno problemi di overflow quando il risultato di un'operazione non è rappresentabile con i bit a disposizione;
- Ci può essere overflow quando:
  - si sommano due numeri positivi:
    riporto sul bit di segno ma non al di fuori (il risultato è negativo!)
    Es: $\begin{array}{ccccc} 0111 & + & 0111 & = & (0)1110 \\ 7 & + & 7 & = & -2 \end{array}$
    14 non è rappresentabile, $N_{max} = 7$
  - si sommano due numeri negativi:
    riporto fuori dal bit di segno ma non sul bit di segno (il risultato è positivo!)
    Es: $\begin{array}{ccccc} 1001 & + & 1010 & = & (1)0011 \\ -7 & + & -6 & = & 3 \end{array}$
    -13 non è rappresentabile, $N_{min} = -8$
- Non ci può essere overflow se gli operandi sono rappresentabili e di segno opposto.

Complemento a 2 (cont.)

Esempio: $m = 6$. Rappresentare -12_{10} in complemento a 2.

Limiti di rappresentabilità:

- $N_{max} = 2^5 - 1 = 31$
- $N_{min} = -1 \cdot 2^5 = -32$

Precedimento:

1. $12_{10} = 001100_2$
2. calcolo del complemento ad 1 (inversione di tutti i bit): $001100 \rightarrow 110011$
3. aggiunta di 1: $\begin{array}{rc} 110011 & + \\ 000001 & = \\ 110100 & \end{array}$

Verifica: $\begin{array}{rcl} 001100 & + & \\ 110100 & = & \\ (\cancel{1})000000 & = & 0_{10} \end{array}$

Complemento a 2 (cont.)

Interpretazione decimale di numeri in complemento a 2

Sia $N_2 = (c_{m-1} \dots c_0)$ un numero binario di m cifre in complemento a 2.
Per la sua interpretazione decimale N_{10}:

- se $c_{m-1} = 0$
  il numero è **positivo** e vale $N_{10} = \sum_{i=0}^{m-2} c_i \cdot 2^i$.
  Es: $01001 = (1 + 8)_{10} = 9_{10}$
- se $c_{m-1} = 1$ il numero è **negativo** e vale $N_{10} = N_{min} + \sum_{i=0}^{m-2} c_i \cdot 2^i$.
  Es: $11001 = (-16 + 1 + 8)_{10} = -7_{10}$

Infatti:

$$\begin{array}{rcl} 01001 & + & \\ 11001 & = & \\ (\cancel{1})00010 & = & 2_{10} = (9-7)_{10} \end{array}$$

Esercizi

Eseguire, rappresentando addendi e risultato in complemento a 2, le seguenti somme algebriche per $m = 5, m = 6, m = 7$. Discutere la rappresentabilità degli addendi e dei risultati ottenuti e riportare in forma decimale i risultati.

1. 2 - 16
2. 16 - 2
3. 12 + 6
4. 5 - 16
5. 15 - 16
6. -15 - 16
7. 31 - 32
8. 32 - 64

Soluzione Es. 1

Eseguire la somma algebrica $(2 - 16)$ rappresentando i numeri in complemento a due con $m = 5, m = 6, m = 7$.

$m = 5$ $N_{max} = 2^4 - 1 = 15$; $N_{min} = -1 \cdot 2^4 = -16$;

$\Rightarrow$ entrambi gli operandi sono rappresentabili.

$$
\begin{array}{rcll}
2_{10} & = & (00010)_2 & \\
-16_{10} & \Rightarrow & (10000)_2 & (16_{10}) \\
 & \Rightarrow & 01111 & \text{(complemento ad 1)} \\
 & \Rightarrow & 10000 & \text{(complemento a 2)}
\end{array}
$$

N.B.: le rappresentazioni di 16 e -16 sono coincidenti.
L'interpretazione corretta (-16) è coerente con il fatto che solo i numeri negativi iniziano con "1".

$$
\text{Svolgimento della somma:}\quad
\begin{array}{ll}
00010 & + \\
10000 & = \\
10010 & = (-16+2)_{10} = -14_{10}
\end{array}
$$

Soluzione Es. 3

Eseguire la somma algebrica $(12 + 6)$ rappresentando i numeri in complemento a due con $m = 5, m = 6, m = 7$.

$m = 5$ $N_{max} = 2^4 - 1 = 15$; $N_{min} = -1 \cdot 2^4 = -16$;

$\Rightarrow$ entrambi gli operandi sono rappresentabili.

$$12_{10} = (01100)_2$$
$$6_{10} = (00110)_2$$

Svolgimento della somma:

$$\begin{array}{ll} 01100 & + \\ 00110 & = \\ 10010 & = (-16 + 2)_{10} = -14_{10} \end{array}$$

Overflow!

Infatti $12 + 6 = 18 > N_{max}$ non è rappresentabile con $m = 5$.

(Riporto sul bit di segno ma non al di fuori di esso.)

Numeri decimali

Anche le parti decimali dei numeri possono essere rappresentate usando codifica binaria:

$$(0.)001001_2 = 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-6} = \frac{1}{8} + \frac{1}{64} = 0.140625_{10}$$

La precisione della rappresentazione indica la minima differenza tra due numeri che può essere codificata e dipende dal numero di bit impiegati. Es: se si usano $m = 4$ bit, la precisione é $\frac{1}{2^4} = 0.0625$.

Da decimale a binario: moltiplicazioni successive

Es: Rappresentare con $m = 4$ la parte decimale 0.265.

$$\begin{array}{ccccccccl} 0.265 & \cdot & 2 & = & \mathbf{0} & , & 53 & \leftarrow & \text{bit più significativo, } c_{-1} \\ 0.53 & \cdot & 2 & = & \mathbf{1} & , & 06 & & \\ 0.06 & \cdot & 2 & = & \mathbf{0} & , & 12 & & \\ 0.12 & \cdot & 2 & = & \mathbf{0} & , & 24 & \leftarrow & \text{bit meno significativo, } c_{-4} \end{array}$$

$\Rightarrow 0.265_{10} \sim (0.)0100_2$

Numeri decimali (cont.)

L'algoritmo termina:

- quando la parte decimale del prodotto è nulla (rappresentazione esatta);
- quando si esauriscono le posizioni decimali disponibili (rappresentazione approssimata).

Errore di approssimazione

E' la misura della differenza tra il numero reale e la sua approssimazione finita.
Nel nostro esempio:

- $0.265_{10} \sim (0.)0100_2 = 1 \cdot 2^{-2} = \frac{1}{4} = 0.25$
- Errore $= |0.265 - 0.25| = 0.015$.

Esercizi

Calcolare la rappresentazione binaria delle seguenti estensioni decimali utilizzando 4, 6 e 8 bit e calcolare l'errore di approssimazione.

1. 0,5
2. 0,55
3. 0,556
4. 0,003
5. 0,08001
6. 0,99999

Numeri in virgola mobile

Notazione scientifica: $\pm \cdot 1.(M) \cdot 2^{E-E'}$

- 1 bit per il segno;
- m_E bit per l'esponente E.
  L'esponente è rappresentato in **eccesso** rispetto a $E' = 2^{m_E-1} - 1$:
  $E_{max} = (2^{m_E} - 1) - E' = 2^{m_E} - 1 - 2^{m_E-1} + 1 = 2^{m_E-1}$.
  $E_{min} = 0 - E' = -(2^{m_E-1} - 1)$.
- m_M bit per la mantissa M.
  Il bit non nullo più significativo viene sempre omesso.

Virgola mobile: rappresentazione

Rappresentare $N = -8,25_{10}$ con $m_E = 3$ e $m_M = 8$.

$E_{max} = 2^2 = 4$.
$E_{min} = -2^2 - 1 = -3$.
$E' = 2^2 - 1 = 3$.

Base 2:
$8_{10} = 1000_2$.
$(0.)25_{10} = (0.)01_2$.

Normalizzazione:
$N = 1000.01_2 \cdot 2^0 = 1.00001_2 \cdot 2^3$.

Calcolo dell'esponente:
$E - E' = 3$.
$\Rightarrow E = 3 + E' = 6_{10} = 110_2$.

Quindi:

$N = 1$	110	00001000
segno	esp.	mant.

Verifica:
Esponente:
$110_2 = 6_{10}; 6 - E' = 6 - 3 = 3$.

$|N| = (1.)00001_2 \cdot 2^3 =$
$(1000.01)_2 = 8 + 0.25 = 8.25$

Il bit di segno è impostato a 1, quindi $N = -8.25$.

Esercizi

Rappresentare in virgola mobile, usando 4 bit per l'esponente e 5 per la mantissa, i seguenti numeri reali. Calcolare l'errore di approssimazione, se presente.

1. 0.256
2. 1,250.76
3. 1,650,000
4. 23.5678

Soluzione Es. 1

Rappresentare in virgola mobile, usando 4 bit per l'esponente e 5 per la mantissa, il numero 0.256 e calcolare l'eventuale errore.

$E_{max} = 2^3 = 8.$
$E_{min} = -2^3 - 1 = -7.$
$E' = 2^3 - 1 = 7.$

Base 2:
$(0.)256_{10} = (0.)0100000_2.$
Calcolato con moltiplicazioni successive. Mi fermo 5 cifre dopo il primo 1 perché ho 5 bit per la mantissa.

Normalizzazione:
$N = 0.0100000_2 \cdot 2^0 = 1.00000_2 \cdot 2^{-2}.$

Calcolo dell'esponente:
$E - E' = -2.$
$\Rightarrow E = -2 + E' = 5_{10} = 0101_2.$

Quindi:
$N = 0\ 0101\ 00000$

Verifica:
Esponente:
$0101_2 = 5_{10}; 5 - E' = 5 - 7 = -2.$

$N = 1.00000_2 \cdot 2^{-2} = (0.01)_2 = 0.25$

Errore: $|0.256 - 0.25| = 0.006.$