RETI DI TLC

M. Ajmone Marsan
F. Neri

Appunti delle lezioni

Indice

1

PROCESSI STOCASTICI

I processi stocastici sono modelli matematici probabilistici utilizzati nella descrizione di fenomeni casuali rappresentabili come funzioni di un parametro che di solito ha il significato di tempo.

In questo capitolo introduciamo in modo informale alcuni risultati della teoria dei processi stocastici, necessari per la costruzione e la soluzione dei modelli probabilistici di reti di telecomunicazioni presentati nella seconda parte di questo testo. Per un trattamento più formale e sistematico della teoria dei processi stocastici, il lettore interessato è rimandato alla vasta letteratura disponibile su questo argomento (si veda ad esempio [KEME60], [PARZ62], [COXM65], [FELL66], [HOWA71], [CINL75], [KARL75]).

1.1 Definizioni di Base

Da un punto di vista matematico, un *processo stocastico* è una famiglia di variabili casuali $\{X(t), t \in T\}$, definite su un unico spazio campione, indicizzate dal parametro t (che chiameremo tempo) e che assumono valori nell'insieme S. I valori assunti dal processo stocastico sono detti *stati*, cosicché S è detto *spazio degli stati* del processo.

E' possibile vedere il processo stocastico anche come un insieme di funzioni del tempo, associando una funzione ad ogni elemento dello spazio campione. Queste funzioni del tempo sono chiamate funzioni campione, o cammini campione (in inglese: *sample path*), o *realizzazioni* del processo stocastico.

La descrizione probabilistica di un processo casuale è data o attraverso la *funzione di distribuzione di probabilità* (DDP – detta anche funzione di distribuzione cumulativa) congiunta[1] delle variabili casuali $\{X(t_i), i = 1,2,\cdots,n\}$,

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{t}) = P\left\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \cdots, X(t_n) \leq x_n\right\} \tag{1.1}$$

o, in alternativa, attraverso la loro *funzione di densità di probabilità* (ddp) congiunta,

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{t}) = \frac{\delta F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{t})}{\delta \boldsymbol{x}} \tag{1.2}$$

La descrizione probabilistica completa del processo $X(t)$ richiede la specifica di una di queste due funzioni per tutti i valori di n, e per tutte le possibili n-uple $(t_1, t_2, \cdots, t_n)$. Nel caso generale è quindi

[1] In questo testo utilizzeremo la notazione $P\{A\}$ per indicare la probabilità dell'evento A.

praticamente impossibile specificare completamente le caratteristiche probabilistiche di un processo casuale. Da ciò discende l'interesse per classi particolari di processi che possono essere caratterizzati in modo semplice.

Lo spazio degli stati del processo può essere discreto o continuo. Nel primo caso abbiamo un processo stocastico *a spazio discreto,* sovente detto *catena.* Nel secondo caso abbiamo un processo stocastico *a spazio continuo.* Lo spazio degli stati di una catena è di solito l'insieme dei numeri interi naturali $\mathbb{N} = \{0,1,2,\cdots\}$, o un suo sottoinsieme finito.

Se il parametro indice t (che abbiamo chiamato tempo) è continuo, abbiamo un processo stocastico *a tempo continuo* (o tempo-continuo); altrimenti abbiamo un processo stocastico *a tempo discreto* (o tempo-discreto), detto anche *sequenza* stocastica, e si usa la notazione $\{X_n, n = 0,1,2,\cdots\}$.

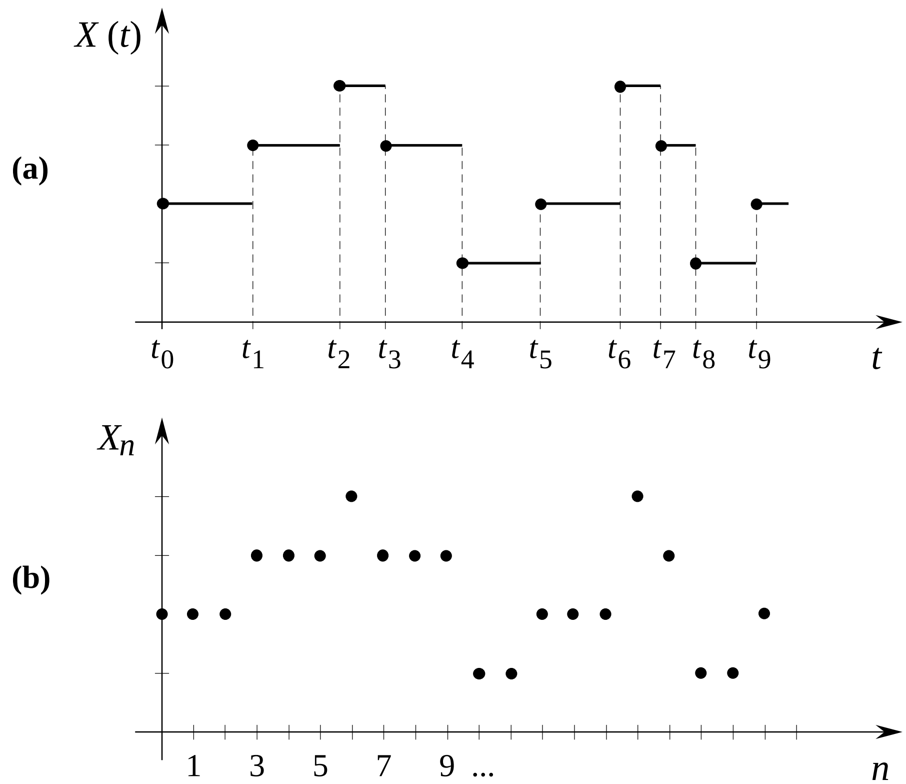

Figura 1.1. Possibili realizzazioni di un processo stocastico a spazio discreto: (a) catena a tempo continuo; (b) catena a tempo discreto

In questo testo siamo interessati ai processi stocastici con spazio degli stati discreto (cioè alle catene) e, nella maggioranza dei casi, finito, sia a tempo continuo, sia a tempo discreto.

Possibili realizzazioni di processi stocastici a spazio discreto sono mostrate nelle figure 1.1.a e 1.1.b, rispettivamente nel caso a tempo continuo e nel caso a tempo discreto. Si osservi che il processo casuale resta in uno stato per un intervallo di tempo di durata casuale, per poi passare ad un nuovo stato. Si noti che, nel caso di tempo continuo, supponiamo che le realizzazioni del processo siano funzioni continue a destra.

1.2 Processi di Markov

I processi di Markov devono il loro nome al matematico russo A. A. Markov, che studiò questa classe di processi nei primi anni del secolo; la loro DDP condizionata soddisfa la seguente proprietà

$$\begin{aligned} &P\left\{X(t) \le x \mid X(t_n) = x_n, X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \cdots, X(t_0) = x_0\right\} \\ &\quad = P\left\{X(t) \le x \mid X(t_n) = x_n\right\} \qquad t > t_n > t_{n-1} > \cdots > t_0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

detta *proprietà di Markov.* Un processo stocastico $\{X(t), t \in T\}$ per cui vale la proprietà di cui sopra è detto *processo di Markov.* Supporremo senza perdere generalità che T sia l'insieme dei numeri reali non negativi, cioè che $T = \mathbb{R}^+ = [0,\infty)$.

In questo testo considereremo unicamente processi di Markov a spazio discreto, noti quindi come *catene di Markov* (CM). Le CM possono essere a tempo discreto o a tempo continuo, a seconda dei valori che il parametro t può assumere. Considereremo perciò sia *catene di Markov a tempo discreto* (CMTD), sia *catene di Markov a tempo continuo* (CMTC).

Le aree di applicazione considerate in questo testo consentono un'ulteriore ipotesi sulla DDP condizionata. Infatti possiamo supporre che il comportamento dei sistemi che studiamo non dipenda dal tempo di osservazione, per cui possiamo scegliere arbitrariamente l'origine dell'asse dei tempi. Possiamo pertanto affermare che

$$P\left\{X(t) \le x \mid X(t_n) = x_n\right\} = P\left\{X(t - t_n) \le x \mid X(0) = x_n\right\} \tag{1.4}$$

Una CM per la quale vale quest'ultima condizione è detta *omogenea* (o *tempo omogenea*). Nel seguito restringeremo l'attenzione alle CM omogenee.

La proprietà di Markov può essere spiegata intuitivamente dicendo che l'evoluzione futura del processo dall'istante t_n in poi non dipende dalla storia passata del processo stocastico; quindi lo stato $X(t_n)$ riassume tutta l'informazione riguardante l'evoluzione passata del processo. Per una CM omogenea non è necessario conoscere t_n, e possiamo quindi affermare che l'evoluzione futura del processo è completamente specificata in termini probabilistici dal suo stato presente.

Un'implicazione importante della proprietà di Markov è che la distribuzione dei *tempi di soggiorno* in uno stato qualsiasi deve essere *priva di memoria.* Infatti, se l'evoluzione futura dipende solo dallo stato presente, essa non deve dipendere dalla quantità di tempo già passata dal processo in tale stato. Questa osservazione, combinata con il fatto che l'unica ddp di variabile casuale continua che soddisfa la proprietà di assenza di memoria

$$P\left\{W \ge t + \tau \mid W \ge t\right\} = P\left\{W \ge \tau\right\} \tag{1.5}$$

è l'esponenziale unilatera

$$f_W(\tau) = a\, \mathrm{e}^{-a\tau} \qquad \tau \ge 0 \tag{1.6}$$

porta alla conclusione che i tempi di soggiorno negli stati di una CMTC devono essere variabili casuali distribuite esponenzialmente.

Una spiegazione intuitiva della proprietà di assenza di memoria può essere fornita a partire dalla rappresentazione grafica della ddp esponenziale unilatera. Nella figura 1.2 è disegnata la ddp data dalla (1.6) nel caso $a = 1$. Se è noto che $W \ge t$, la ddp condizionata è nulla nell'intervallo $[0,t)$. Ne consegue che la ddp condizionata si ottiene rinormalizzando la parte rimanente della ddp originaria (quella in $[t,\infty)$, tratteggiata nella figura 1.2) in modo che il suo integrale sia unitario. Come si può vedere dalla figura 1.2, la ddp risultante è identica a quella di partenza, ma traslata di un tempo t.

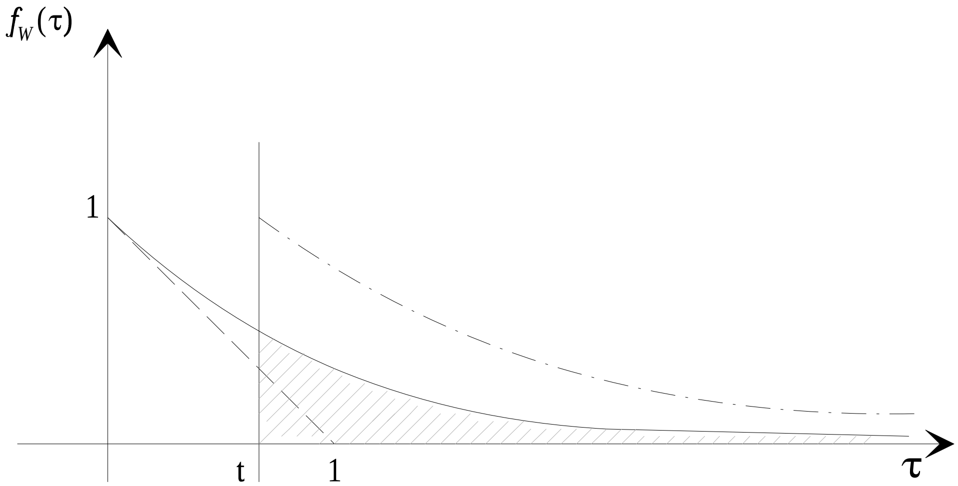

Figura 1.2. Densità di probabilità esponenziale ed assenza di memoria

Ciò significa che la distribuzione del tempo di soggiorno è identica alla distribuzione del tempo di soggiorno residuo dopo un tempo t. Ne consegue la (1.5). Si noti che altre forme di ddp non portano a risultati analoghi e quindi le variabili casuali relative non sono prive di memoria.

In modo analogo, nel caso di CMTD, i tempi di soggiorno negli stati devono essere variabili casuali distribuite geometricamente

$$P\{W = i\} = p^{i-1}(1-p) \qquad i = 1,2,3,\cdots \tag{1.7}$$

L'importanza del fatto che i tempi di soggiorno debbano soddisfare la proprietà di assenza di memoria può essere meglio compresa notando che la verifica del fatto che un processo stocastico sia un processo di Markov può essere limitata a verificare che i tempi di soggiorno negli stati siano privi di memoria, e che le probabilità di passare da uno stato ad un altro dipendano solo dallo stato che il processo sta lasciando e dallo stato verso cui il processo evolve.

Dimostrazione della proprietà di assenza di memoria della densità di probabilità esponenziale unilatera

La proprietà di assenza di memoria per una variabile casuale X può essere formalizzata nel modo seguente:

$$P\{X > t + \tau \mid X > \tau\} = P\{X > t\} \tag{1.8}$$

Tale relazione può essere manipolata per arrivare ad una equazione funzionale la cui soluzione è l'esponenziale unilatera. Come primo passo, la (1.8) può essere riscritta come

$$P\{X \leq t + \tau \mid X > \tau\} = P\{X \leq t\}$$

ed elaborata nel modo seguente

$$\begin{aligned}
\frac{P\{X \le t+\tau, X > \tau\}}{P\{X > \tau\}} &= P\{X \le t\} \\
\frac{P\{\tau < X \le t+\tau\}}{P\{X > \tau\}} &= P\{X \le t\} \\
\frac{F_X(t+\tau) - F_X(\tau)}{1 - F_X(\tau)} &= F_X(t) \\
\frac{F_X(t+\tau) - F_X(\tau)}{1 - F_X(\tau)} &= F_X(t) - F_X(0)
\end{aligned}$$

dove $F_X(t) = P\{X \le t\}$ è la distribuzione cumulativa di probabilità della variabile casuale X; $F_X(0) = 0$ perchè X è una variabile casuale che assume sempre valori positivi. Prendendo poi il limite per $t \to 0$ e dividendo per t si ottiene

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{F_X(t+\tau) - F_X(\tau)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{F_X(t) - F_X(0)}{t}[1 - F_X(\tau)] \\
F'_X(\tau) &= F'_X(0)[1 - F_X(\tau)]
\end{aligned}$$

Ponendo $A(\tau) = 1 - F_X(\tau)$, possiamo scrivere

$$A'(\tau) = A'(0)A(\tau)$$

La soluzione di quest'ultima equazione, chiamando $\lambda = A'(0)$, diventa

$$A(\tau) = \mathrm{e}^{-\lambda\tau} \qquad \tau \ge 0$$

Quindi

$$\begin{aligned}
F_X(\tau) &= [1 - \mathrm{e}^{-\lambda\tau}]u(\tau) \\
f_X(\tau) &= \lambda \mathrm{e}^{-\lambda\tau}u(\tau)
\end{aligned}$$

sono la distribuzione cumulativa e la densità di probabilità di una variabile casuale che gode della proprietà (1.8) di assenza di memoria.

1.3 Catene di Markov a Tempo Discreto

Se specializziamo la proprietà di Markov nel caso di tempo discreto e spazio discreto, otteniamo la definizione di CMTD.

DEFINIZIONE
La sequenza stocastica $\{X_n, n = 0,1,2,\cdots\}$ definita sullo spazio degli stati S è una CMTD se

$$\begin{aligned}
&P\{X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \cdots, X_0 = x_0\} = \\
&\qquad P\{X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n\}
\end{aligned} \tag{1.9}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, e $\forall x_k \in S$.

L'espressione a secondo membro dell'equazione qui sopra è detta *probabilità di transizione* (in un passo) della catena, e rappresenta la probabilità che il processo passi dallo stato x_n allo stato x_{n+1} quando il parametro indice è incrementato da n a $n+1$. Utilizzeremo la seguente notazione

$$p_{ij}(n) = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} \qquad \forall i \in S, \forall j \in S \tag{1.10}$$

Se la CMTD è omogenea, queste probabilità non dipendono da n, per cui possiamo semplificare la notazione eliminando la variabile n, e quindi scrivere le probabilità di transizione come

$$p_{ij} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} \qquad \forall i \in S, \forall j \in S \tag{1.11}$$

Questa grandezza esprime la probabilità di essere nello stato j al prossimo passo, dato che lo stato presente è i. Si noti che sommando le probabilità p_{ij} su tutti i possibili stati j dello spazio degli stati S il risultato deve essere 1:

$$\sum_{j \in S} p_{ij} = 1 \qquad \forall i \in S \tag{1.12}$$

1.3.1 Distribuzione al Passo n

Uno degli obiettivi dello studio delle CMTD è la valutazione delle probabilità che il processo si trovi in un generico stato i ad un dato passo n. Queste *probabilità degli stati* sono espresse come

$$\pi_i(n) = P\{X_n = i\} \qquad \forall i \in S \tag{1.13}$$

e possono essere valutate dalla conoscenza delle probabilità di transizione e dalla DDP iniziale (al tempo 0). Infatti, usando il teorema della probabilità totale, possiamo scrivere

$$\pi_i(n) = \sum_{j \in S} P\{X_n = i \mid X_0 = j\}\ \pi_j(0) \qquad \forall i \in S \tag{1.14}$$

Le quantità che moltiplicano $\pi_j(0)$ nella sommatoria sono le probabilità di trovare il processo nello stato i al passo n, dato che il processo si trovava nello stato j al tempo 0. Esse sono chiamate *probabilità di transizione in n passi* e, per la omogeneità della CMTD, sono definite come

$$p_{ji}^{(n)} = P\{X_{n+m} = i \mid X_m = j\} \qquad \forall i \in S, \forall j \in S, \forall m \geq 0 \tag{1.15}$$

Quindi possiamo riscrivere la (1.14) come

$$\pi_i(n) = \sum_{j \in S} p_{ji}^{(n)}\ \pi_j(0) \qquad \forall i \in S \tag{1.16}$$

Utilizzando la proprietà di Markov è possibile scrivere

$$\begin{aligned} p_{ji}^{(n)} &= P\{X_{n+m} = i \mid X_m = j\} && (1.17)\\ &= \sum_{k \in S} P\{X_{n+m} = i \mid X_m = j, X_{n+m-l} = k\} P\{X_{n+m-l} = k \mid X_m = j\} && (1.18)\\ &= \sum_{k \in S} P\{X_{n+m} = i \mid X_{n+m-l} = k\} P\{X_{n+m-l} = k \mid X_m = j\} && (1.19) \end{aligned}$$

Le probabilità di transizione in n passi soddisfano quindi la seguente relazione

$$p_{ji}^{(n)} = \sum_{k \in S} p_{ki}^{(l)}\ p_{jk}^{(n-l)} \qquad \forall i \in S, \forall j \in S \tag{1.20}$$

che è nota come equazione di Chapman-Kolmogorov per CMTD omogenee. Essa afferma che è possibile esprimere una qualsiasi probabilità di transizione in n passi come somma dei prodotti delle probabilità di transizione in $n-l$ passi e delle probabilità di transizione in l passi. Infatti, per andare dallo stato j allo stato i in n passi è necessario andare da j ad uno stato intermedio k in $n-l$ passi, e poi da k a i nei rimanenti l passi (si veda la figura 1.3). Sommando su tutti i possibili stati intermedi k consideriamo tutti i possibili cammini distinti che portano dallo stato j allo stato i in n passi.

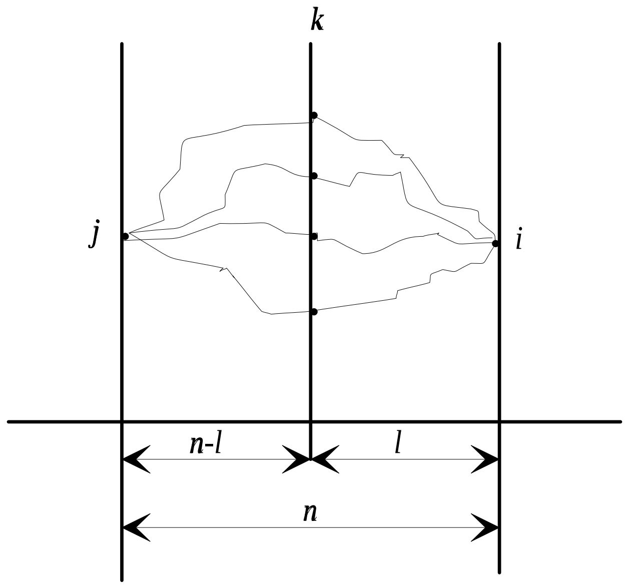

Figura 1.3. Visualizzazione dell'equazione di Chapman-Kolmogorov per CMTD

In particolare, se scegliamo $l=1$ oppure $l=n-1$, otteniamo

$$p_{ji}^{(n)} = \sum_{k \in S} p_{jk}^{(n-1)}\, p_{ki} = \sum_{k \in S} p_{jk}\, p_{ki}^{(n-1)} \qquad \forall i \in S, \forall j \in S \tag{1.21}$$

Queste relazioni forniscono le espressioni ricorsive per il calcolo delle probabilità di transizione in n passi a partire dalle probabilità di transizione in un passo.

E' quindi possibile valutare la probabilità $\pi_i(n)$ che il processo si trovi nello stato i al passo n se sono note la distribuzione iniziale e le probabilità di transizione (in un passo).

La conoscenza delle probabilità di transizione in n passi permette la valutazione della DDP congiunta delle variabili casuali estratte dal processo ad un qualsiasi insieme di istanti di tempo, data la DDP iniziale. Ad esempio, supponendo di estrarre tre variabili casuali dalla CMTD $\{X_n, n = 0,1,2,\cdots\}$ ai tempi 3, 5, e 11, la loro distribuzione di probabilità congiunta è definita dalle probabilità $P\{X_3 = i, X_5 = j, X_{11} = k\}$. Queste si possono calcolare come segue.

$$P\{X_3 = i, X_5 = j, X_{11} = k\} =$$
$$= \sum_{m \in S} P\{X_3 = i, X_5 = j, X_{11} = k \mid X_0 = m\}\, \pi_m(0)$$

$$= \sum_{m \in S} P\{X_5 = j, X_{11} = k \mid X_3 = i, X_0 = m\} \, P\{X_3 = i \mid X_0 = m\} \;\; \pi_m(0)$$
$$= \sum_{m \in S} P\{X_5 = j, X_{11} = k \mid X_3 = i\} \, p_{mi}^{(3)} \; \pi_m(0)$$
$$= \sum_{m \in S} P\{X_{11} = k \mid X_5 = j\} \, p_{ij}^{(2)} \; p_{mi}^{(3)} \; \pi_m(0)$$
$$= \sum_{m \in S} p_{jk}^{(6)} \; p_{ij}^{(2)} \; p_{mi}^{(3)} \; \pi_m(0)$$

Dato che le probabilità di transizione in n passi possono essere calcolate a partire dalle probabilità di transizione in un passo, possiamo concludere che il comportamento del processo stocastico è completamente descritto in modo probabilistico dalla distribuzione iniziale e dalle probabilità di transizione in un passo.

1.3.2 Distribuzione di Regime

Un secondo importante problema che si presenta nello studio delle CMTD riguarda l'esistenza e la valutazione della distribuzione di regime. Questo problema ci interessa in modo particolare, in quanto i risultati relativi alle prestazioni di reti di telecomunicazioni che ricaveremo nel testo sono basati su di un'analisi di regime.

Prima di presentare i risultati principali dell'analisi a regime delle CMTD, occorre introdurre alcune definizioni riguardanti la catena e i suoi stati.

Sia $\forall j \in S$

$$\begin{aligned} f_j^{(n)} &= P\{\text{primo ritorno nello stato } j \text{ avvenga } n \text{ passi dopo averlo lasciato}\} \\ &= P\{X_{k+1} \neq j, \cdots, X_{k+n-1} \neq j, X_{k+n} = j \mid X_k = j\} \end{aligned} \tag{1.22}$$

e

$$f_j = \sum_{n=1}^{\infty} f_j^{(n)} = P\{\text{di ritornare prima o poi nello stato } j\} \tag{1.23}$$

Uno stato $j \in S$ è detto *transitorio* se $f_j < 1$, cioè se c'è una probabilità non nulla di non ritornare mai allo stato j dopo averlo lasciato. Uno stato $j \in S$ è detto *ricorrente* se $f_j = 1$, cioè se con probabilità 1 il processo ritorna prima o poi allo stato j dopo averlo lasciato.

Per uno stato $j \in S$ ricorrente, la probabilità di transizione in n passi $p_{jj}^{(n)}$ deve essere maggiore di 0 per qualche valore di $n > 0$.

Definiamo per uno stato $j \in S$ la quantità d_j come il massimo comun divisore di tutti gli interi positivi n tali che $p_{jj}^{(n)} > 0$. Uno stato $j \in S$ ricorrente è detto *periodico* con periodo d_j se $d_j > 1$.

Uno stato $j \in S$ è detto *trappola* se $p_{jj} = 1$, cioè se, dopo aver raggiunto tale stato, la catena non può più uscirne. Uno stato trappola è ricorrente.

Per uno stato $j \in S$ ricorrente, definiamo il *tempo medio di ricorrenza* M_j come

$$M_j = \sum_{n=1}^{\infty} n \; f_j^{(n)} \qquad \forall j \in S \tag{1.24}$$

Il tempo medio di ricorrenza è il numero medio di passi necessari a ritornare allo stato j per la prima volta dopo averlo lasciato.

Gli stati ricorrenti per i quali $M_j < \infty$ sono detti *ricorrenti non nulli.* Gli stati ricorrenti per i quali il tempo medio di ricorrenza è infinito sono detti *ricorrenti nulli.*

Un sottoinsieme A dello spazio degli stati S è detto *chiuso* se non è possibile alcuna transizione dagli stati di A a stati di $\bar{A}$ (complemento dell'insieme A), cioè se

$$\sum_{i \in A} \sum_{j \in \bar{A}} p_{ij} = 0 \tag{1.25}$$

Una CMTD è detta *irriducibile* se nessun sottoinsieme proprio di S è chiuso. Ciò implica che ogni stato della catena possa essere raggiunto da ogni altro stato; quindi, per ogni coppia di stati i e j, ci deve essere almeno un n tale per cui $p_{ij}^{(n)} > 0$.

E' possibile dimostrare che tutti gli stati di una CMTD irriducibile sono dello stesso tipo, quindi essi possono solo essere o tutti transitori, o tutti ricorrenti nulli, o tutti ricorrenti non nulli. Si noti che una catena irriducibile non può comprendere stati trappola. Inoltre, o tutti gli stati sono aperiodici, oppure tutti hanno lo stesso periodo d. Nel primo caso, la catena stessa è detta aperiodica, mentre essa viene detta periodica nell'altro caso.

Una qualsiasi distribuzione di probabilità $\{z_i,\, i \in S\}$ definita sugli stati di una CMTD è detta *stazionaria* se

$$z_i = \sum_{j \in S} z_j\, p_{ji} \qquad \forall i \in S \tag{1.26}$$

cioè se, una volta che tale distribuzione è raggiunta, essa rimane la distribuzione del processo per tutti i passi successivi.

Definiamo le *probabilità limite* $\{\pi_j,\, j \in S\}$ come

$$\pi_j = \lim_{n \to \infty} \pi_j(n) \qquad \forall j \in S \tag{1.27}$$

E' possibile dimostrare che tale limite esiste per tutte le CMTD omogenee e aperiodiche. Inoltre, se la CMTD è irriducibile, i limiti sono indipendenti dalla distribuzione iniziale $\{\pi_j(0), j \in S\}$. Se tutti gli stati della catena sono o transitori o ricorrenti nulli, allora

$$\pi_j = 0 \qquad \forall j \in S \tag{1.28}$$

Invece, se tutti gli stati sono ricorrenti non nulli, si ha

$$\pi_j > 0 \qquad \forall j \in S \tag{1.29}$$

e le probabilità limite $\{\pi_j, j \in S\}$ formano una distribuzione stazionaria.

Nell'ultimo caso tutti gli stati sono detti *ergodici* e la catena stessa è detta *ergodica;* inoltre le probabilità limite $\{\pi_j, j \in S\}$ sono uniche. Esse possono essere ottenute risolvendo il sistema di equazioni lineari

$$\begin{aligned} &\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i\, p_{ij} \qquad \forall j \in S \qquad &\text{(a)} \\ &\sum_{j \in S} \pi_j = 1 \qquad &\text{(b)} \end{aligned} \tag{1.30}$$

Le probabilità limite di una CMTD ergodica sono sovente chiamate anche probabilità di equilibrio o di regime.

E' facile dimostrare che le probabilità di regime di una CMTD ergodica soddisfano anche la relazione

$$\pi_j = \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} \qquad \forall j \in S \tag{1.31}$$

cioè rappresentano il limite per n tendente ad infinito delle probabilità di transizione in n passi da un qualsiasi stato i ad un dato stato j.

Il tempo medio $v_j(\tau)$ speso a regime dal processo nello stato j in un periodo di durata fissa τ può essere ottenuto come il prodotto della probabilità di regime dello stato j per la durata del periodo di osservazione

$$v_j(\tau) = \pi_j \ \tau \qquad \forall j \in S \tag{1.32}$$

E' facile verificare che il tempo medio di ricorrenza di uno stato j è dato dal rapporto tra la durata τ del periodo di osservazione e il tempo $v_j(\tau)$ quando τ tende ad infinito. Esiste quindi un legame molto semplice tra le probabilità limite e i tempi medi di ricorrenza degli stati

$$M_j = \frac{1}{\pi_j} \qquad \forall j \in S \tag{1.33}$$

Si può verificare inoltre che il tempo medio v_{ij} trascorso dal processo nello stato i a regime tra due successive *visite* allo stato j è uguale al rapporto tra le probabilità di regime degli stati i e j

$$v_{ij} = \frac{\pi_i}{\pi_j} = \frac{M_j}{M_i} \qquad \forall i \in S, \forall j \in S \tag{1.34}$$

Il termine visita può essere spiegato come segue. Diciamo che il processo visita lo stato i al tempo n se $X_n = i$. La quantità v_{ij} è detta *rapporto di visita* (in inglese: *visit ratio*), dato che indica il numero medio di visite allo stato i tra due visite successive allo stato j.

Una CM che comprende un numero finito di stati è detta *catena di Markov finita.* E' facile dimostrare che tutti gli stati di una CMTD finita irriducibile e aperiodica sono ergodici.

Esempio

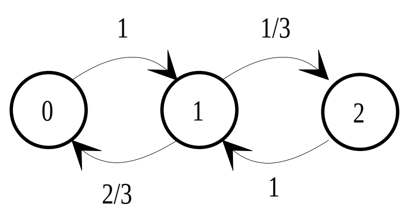

Figura 1.4. CMTD periodica

Si consideri la catena di Markov in tempo discreto rappresentata nella figura 1.4, con condizione iniziale $\pi_0(0) = 1$.

La distribuzione al passo $n = 0,1,2,\ldots$ si può ottenere dalla condizione iniziale attraverso il sistema

$$\begin{cases} \pi_0(n) = \frac{2}{3}\pi_1(n-1) \\ \pi_2(n) = \frac{1}{3}\pi_1(n-1) \\ \pi_0(n) + \pi_1(n) + \pi_2(n) = 1 \end{cases}$$

n	π_0	π_1	π_2
0	1	0	0
1	0	1	0
2	0.6667	0	0.3333
3	0	1	0
4	0.6667	0	0.3333
5	0	1	0
6	0.6667	0	0.3333
...	...	...	...

Tabella 1.1. Distribuzione al passo n per la CMTD della figura 1.4

ed è mostrata nella tabella 1.1. La catena ha periodo pari a 2, quindi non è ergodica. Si noti che a regime cicla attraverso un insieme di distribuzioni la cui cardinalità è pari al periodo. La scrittura del sistema (1.30) in questo caso diventa

$$\begin{cases} \pi_0 = \frac{2}{3}\pi_1 \\ \pi_2 = \frac{1}{3}\pi_1 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

che si risolve nella distribuzione stazionaria

$$\pi_0 = \frac{1}{3} \qquad \pi_1 = 0.5 \qquad \pi_2 = \frac{1}{6}$$

Tale soluzione coincide con la media delle distribuzioni su cui il sistema si muove periodicamente a regime.

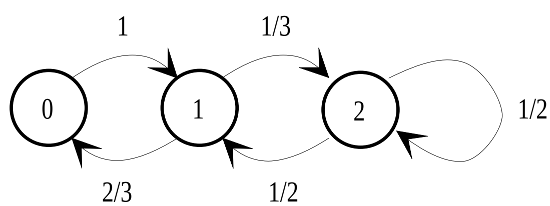

Figura 1.5. CMTD ergodica

Si consideri ora la catena di Markov in tempo discreto rappresentata nella figura 1.5. La CMTD ora è ergodica; calcolandone la distribuzione di regime si ottiene

$$\begin{cases} \pi_0 = \frac{2}{3}\pi_1 \\ \frac{1}{3}\pi_1 = \frac{1}{2}\pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

che si risolve in

$$\pi_0 = \frac{2}{7} \qquad \pi_1 = \frac{3}{7} \qquad \pi_2 = \frac{2}{7}$$

n	π_0	π_1	π_2
0	1	0	0
1	0	1	0
2	0.6667	0	0.3333
3	0	0.8333	0.1667
4	0.5556	0.0833	0.3611
5	0.0556	0.7361	0.2083
6	0.4907	0.1597	0.3495
7	0.1065	0.6655	0.2280
8	0.4437	0.2205	0.3358
9	0.1470	0.6116	0.2414
10	0.4077	0.2677	0.3246
...	...	...	...
20	0.3149	0.3842	0.2964
21	0.2561	0.4676	0.2763
...	...	...	...
30	0.2950	0.4163	0.2887
31	0.2776	0.4393	0.2831
...	...	...	...
40	0.2883	0.4252	0.2865
41	0.2835	0.4351	0.2850
...	...	...	...
∞	0.2857	0.4286	0.2857

Tabella 1.2. Distribuzione al passo n per la CMTD della figura 1.5

La distribuzione al passo $n = 0,1,2,\dots$ è mostrata nella tabella 1.2. Si noti che la distribuzione al passo n tende alla distribuzione di regime al crescere di n.

1.3.3 Formulazione Matriciale

L'uso di una notazione matriciale può essere particolarmente conveniente per semplificare la forma di molti dei risultati ottenuti nei paragrafi precedenti.

Definiamo la matrice $\boldsymbol{P}$ delle probabilità di transizione

$$\boldsymbol{P} = [p_{ij}] \tag{1.35}$$

e il vettore $\boldsymbol{\pi}(n)$, i cui elementi sono le probabilità degli stati al passo n

$$\boldsymbol{\pi}(n) = [\pi_1(n), \pi_2(n), \cdots] \tag{1.36}$$

Dalla (1.21) otteniamo che la matrice delle probabilità di transizione al passo n può essere espressa come la potenza n-esima della matrice $\boldsymbol{P}$, e quindi che la (1.16) può essere scritta in forma matriciale

$$\boldsymbol{\pi}(n) = \boldsymbol{\pi}(0)\ \boldsymbol{P}^n \tag{1.37}$$

Quest'ultima equazione può essere usata per valutare la distribuzione al passo n della CMTD, data la matrice delle probabilità di transizione $\boldsymbol{P}$ e il vettore $\boldsymbol{\pi}(0)$ della distribuzione iniziale. Si noti che le matrici $\boldsymbol{P}^n$ sono matrici stocastiche (gli elementi di ogni riga sommano a 1) per ogni valore di n.

Se una CMTD ergodica è finita, la distribuzione di probabilità di regime

$$\boldsymbol{\pi} = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\pi}(n) \tag{1.38}$$

può essere valutata dall'equazione matriciale

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\ \boldsymbol{P} \tag{1.39}$$

che è la (1.30a) in forma matriciale. La condizione di normalizzazione (1.30b) deve essere usata come prima insieme alla (1.39) per identificare la (unica) distribuzione di probabilità di regime.

1.3.4 Tempi di Soggiorno

Come commento finale sulle proprietà delle CMTD, osserviamo che, come già detto, i tempi di soggiorno nello stato i sono variabili casuali W_i con distribuzione geometrica:

$$P\{W_i = k\} = p_{ii}^{k-1}(1-p_{ii}) \qquad k = 1,2,\cdots \qquad \forall i \in S \tag{1.40}$$

Infatti, dato che il processo si trova nello stato i, ad ogni passo la probabilità di lasciare lo stato i è $(1-p_{ii})$, e la scelta è ripetuta in modo indipendente ad ogni passo. Il numero medio di passi trascorsi nello stato i ogni volta che il processo vi entra, prima di andare in un altro stato, è quindi

$$E[W_i] = \sum_{k=1}^{\infty} k p_{ii}^{k-1}(1-p_{ii}) = \frac{1}{1-p_{ii}} \qquad \forall i \in S \tag{1.41}$$

Esempio

Supponiamo che le condizioni metereologiche giornaliere di qualche paese possano essere rappresentate da tre possibili stati: sole, nuvole, pioggia. Supponiamo inoltre che le condizioni in un dato giorno dipendano, in senso probabilistico, solo dalle condizioni metereologiche del giorno precedente. Se indichiamo i tre possibili stati con i numeri 1, 2 e 3, rispettivamente per sole, nuvole e pioggia, le probabilità associate alle condizioni metereologiche di un dato giorno, condizionate alle condizioni del giorno precedente, siano descritte dalla matrice

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} .7 & .2 & .1 \\ .3 & .5 & .2 \\ .2 & .6 & .2 \end{bmatrix}$$

E' immediato verificare che questo modello metereologico soddisfa la proprietà di Markov. Inoltre, dato che il processo è a tempo discreto e a spazio discreto, possiamo interpretare l'ultima matrice come la matrice delle probabilità di transizione di una CMTD finita ed ergodica, dato che dalla matrice vediamo che il processo stocastico è omogeneo, irriducibile e aperiodico.

La matrice delle probabilità di transizione in due passi può essere calcolata come quadrato della matrice $\boldsymbol{P}$,

$$\boldsymbol{P}^2 = \left[p_{ij}^{(2)}\right] = \begin{bmatrix} .57 & .30 & .13 \\ .40 & .43 & .17 \\ .36 & .46 & .18 \end{bmatrix}$$

Le potenze di ordine più elevato della matrice $\boldsymbol{P}$ danno le matrici delle probabilità di transizione in n passi per $n > 2$. La matrice $\boldsymbol{P}^2$ ci dice per esempio che, dato che oggi il tempo è piovoso, abbiamo una probabilità del 36% di avere sole dopodomani.

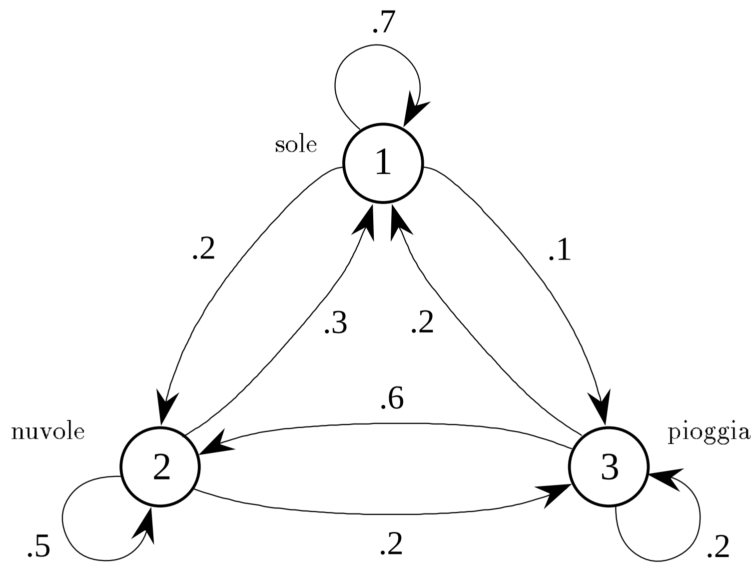

Figura 1.6. Diagramma delle transizioni tra stati per la CMTD rappresentante le condizioni atmosferiche

La CMTD può anche essere descritta per mezzo del grafo della figura 1.6, che contiene la stessa informazione della matrice delle probabilità di transizione. In effetti le due rappresentazioni possono essere ricavate l'una dall'altra. La rappresentazione grafica è sovente chiamata diagramma delle transizioni (tra stati) della CMTD.

La distribuzione di regime della CMTD può essere ricavata risolvendo il sistema di equazioni lineari

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= .7\pi_1 + .3\pi_2 + .2\pi_3 \\
\pi_2 &= .2\pi_1 + .5\pi_2 + .6\pi_3 \\
\pi_3 &= .1\pi_1 + .2\pi_2 + .2\pi_3 \\
1 &= \pi_1 + \pi_2 + \pi_3
\end{aligned}$$

Si noti che le prime tre equazioni sono linearmente dipendenti, così che una di esse può essere scartata.

Si può verificare che la distribuzione di regime è

$$\boldsymbol{\pi} = \left(\tfrac{28}{59}, \tfrac{22}{59}, \tfrac{9}{59} \right)$$

Ciò implica che a regime la probabilità di un giorno di sole è $\pi_1 = 28/59 = .47$, che il tempo medio di ricorrenza di un giorno di sole è $M_1 = 1/\pi_1 = 2.1$ giorni, e che il numero medio di giorni di sole tra due giorni di pioggia consecutivi è $\pi_1/\pi_3 = 28/9 = 3.11$. Inoltre, se oggi c'è il sole, possiamo aspettarci ancora $1/(1 - p_{11}) = 2.33$ giorni di sole prima che il tempo cambi.

1.3.5 Catene di Nascita e Morte

Una particolare classe di catene di Markov a tempo discreto è costituita da processi con spazio degli stati $S = \{0,1,2,\cdots\}$, in cui sono possibili soltanto incrementi o decrementi unitari dell'indice di stato, così che è possibile soltanto passare dallo stato i agli stati $i+1$ oppure $i-1$ (oltre che rimanere nello stato i). Questi processi prendono il nome di *catene di nascita e morte* perché costituiscono un modello naturale per l'evoluzione del numero di individui in una popolazione.

Indicando con b_i la probabilità che si verifichi una nascita quando il processo si trova nello stato i e con d_i la probabilità che si verifichi una morte, le probabilità di transizione possono essere scritte come

$$p_{ij} = \begin{cases} b_i & j = i+1, i \geq 0 \\ d_i & j = i-1, i > 0 \\ 1 - b_i - d_i & j = i, i > 0 \\ 1 - b_0 & j = i = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

essndo $d_0 = 0$ perché non si possono avere morti se non esistono individui. Si noti che supponiamo (avendo $b_0 > 0$) che ci possano essere nascite anche quando non ci sono individui. Se rimuovessimo tale ipotesi, ponendo $b_0 = 0$, lo stato 0 sarebbe trappola, per cui la catena non sarebbe irriducibile, quindi neppure ergodica.

Il diagramma di transizione tra gli stati è mostrato nella figura 1.7.

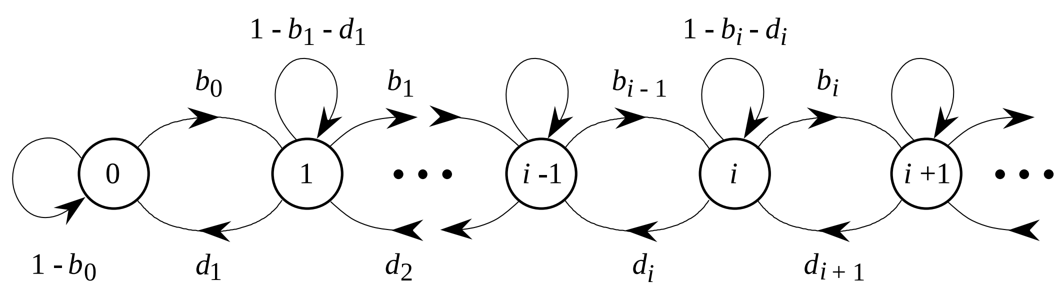

Figura 1.7. Diagramma di transizione di una catena di Markov di nascita e morte a tempo discreto

Se $0 < b_i < 1 \quad \forall i \geq 0$ e $0 < d_i < 1 \quad \forall i > 0$ la catena è irriducibile, ed è aperiodica se $\exists i : b_i + d_i < 1$. Se invece $b_i + d_i = 1 \ \forall i$ la catena è periodica con periodo 2. Gli stati possono essere ricorrenti o transitori a seconda dei valori delle probabilità b_i e d_i.

Per trovare la condizione sotto la quale la catena è ergodica impostiamo il calcolo della distribuzione di regime.

Dalle equazioni $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\,\boldsymbol{P}$ si può scrivere

$$\pi_0 = (1 - b_0)\pi_0 + d_1\pi_1 \tag{1.42}$$

$$\pi_i = (1 - b_i - d_i)\pi_i + b_{i-1}\pi_{i-1} + d_{i+1}\pi_{i+1} \qquad \forall i > 0 \tag{1.43}$$

o anche

$$\pi_0 b_0 - \pi_1 d_1 = 0 \tag{1.44}$$

$$\pi_{i-1}b_{i-1} - \pi_i d_i = \pi_i b_i - \pi_{i+1}d_{i+1} \qquad \forall i > 0 \tag{1.45}$$

che implica

$$\pi_{i-1}b_{i-1} - \pi_i d_i = 0 \qquad \forall i > 0 \tag{1.46}$$

ovvero

$$\pi_i d_i = \pi_{i-1}b_{i-1} \qquad \forall i > 0 \tag{1.47}$$

Dalla (1.47) segue che

$$\pi_i = \pi_{i-1}\,\frac{b_{i-1}}{d_i} \qquad \forall i > 0 \tag{1.48}$$

così che, risolvendo ricorsivamente, si ricava

$$\pi_i = \prod_{j=1}^{i} \frac{b_{j-1}}{d_j}\,\pi_0 = \frac{b_0 b_1 \cdots b_{i-1}}{d_1 d_2 \cdots d_i}\,\pi_0 \qquad \forall i > 0 \tag{1.49}$$

Da questa relazione e dalla condizione di normalizzazione

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = \pi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i = 1$$

si ricava

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{i} \frac{b_{j-1}}{d_j}} \tag{1.50}$$

Se la sommatoria a denominatore converge, gli stati sono tutti ricorrenti non nulli e le π_i definiscono una distribuzione di regime; altrimenti la catena non è ergodica. Una semplice condizione sufficiente per la convergenza della sommatoria è che per $k > k_0$ (dove k_0 è una costante qualsiasi) sia sempre $b_k < d_k$.

Nel caso particolare in cui $b_i = b\ \forall i \geq 0$ e $d_i = d\ \forall i > 0$, si ottiene

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{b}{d}\right)^i} \tag{1.51}$$

La sommatoria converge per $b < d$ fornendo il risultato

$$\pi_0 = 1 - \frac{b}{d} \tag{1.52}$$

Sotto la stessa condizione la catena è ergodica, e la distribuzione di regime vale

$$\pi_i = \left(1 - \frac{b}{d}\right)\left(\frac{b}{d}\right)^i \qquad \forall i \geq 0 \tag{1.53}$$

1.3.6 La Coda $Geom/Geom/1$

Si consideri un modello a coda a singolo servitore in tempo discreto in cui ad ogni istante si può verificare un arrivo con probabilità α. Nel caso in cui il servitore sia attivo, ad ogni istante si può verificare la fine del servizio e la conseguente partenza del cliente con probabilità β.

Ciò implica che gli intervalli tra due arrivi consecutivi, che indichiamo con le variabili casuali τ_i, abbiano ddp

$$f_{\tau_i}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha \, (1-\alpha)^{k-1} \, \delta(t-k) \tag{1.54}$$

quindi di tipo geometrico con valor medio $1/\alpha$, e che anche i tempi di servizio, che indichiamo con le variabili casuali σ_i, abbiano ddp di tipo geometrico con valor medio $1/\beta$

$$f_{\sigma_i}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta \, (1-\beta)^{k-1} \, \delta(t-k) \tag{1.55}$$

Tale coda viene indicata, secondo la notazione di Kendall, che introdurremo nel prossimo capitolo, con la sigla $Geom/Geom/1$.

Il fatto che le densità di probabilità delle variabili casuali in gioco siano prive di memoria garantisce che, prendendo come definizione di stato del sistema il numero di clienti in attesa o in servizio (numero di clienti nel sistema a coda), il modello sia una catena di Markov a tempo discreto con $S = \{0,1,2,\cdots\}$.

Le probabilità di transizione possono essere scritte come

$$p_{ij} = \begin{cases} \alpha & i=0, j=1 \\ 1-\alpha & i=0, j=0 \\ \alpha(1-\beta) & i>0, j=i+1 \\ (1-\alpha)\beta & i>0, j=i-1 \\ (1-\alpha)(1-\beta)+\alpha\beta & i>0, j=i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si può immediatamente verificare che il modello risultante è una catena di Markov a tempo discreto di nascita e morte, con

$$b_i = \begin{cases} \alpha & i=0 \\ \alpha(1-\beta) & i>0 \end{cases}$$

e

$$d_i = \beta(1-\alpha) \qquad i>0$$

per cui dalla (1.49) si ricava

$$\pi_i = \pi_0 \, \frac{\alpha \, [\alpha(1-\beta)]^{i-1}}{[(1-\alpha)\beta]^i} = \frac{\pi_0}{1-\beta} \left[\frac{\alpha(1-\beta)}{(1-\alpha)\beta} \right]^i \qquad i>0 \tag{1.56}$$

con [dalla (1.50)]

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{1-\beta} \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)} \right]^i} \tag{1.57}$$

La sommatoria a denominatore converge se $\dfrac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)} < 1$, ovvero se $\alpha < \beta$. In questo caso la catena è ergodica e si ottiene

$$\pi_0 = 1 - \frac{\alpha}{\beta} \tag{1.58}$$

$$\pi_i = \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) \frac{1}{1-\beta} \left[\frac{\alpha(1-\beta)}{(1-\alpha)\beta}\right]^i \qquad i > 0 \tag{1.59}$$

Ponendo $\rho = \dfrac{\alpha}{\beta}$, cioè identificando con ρ il rapporto tra il tempo medio di servizio $1/\beta$ e il tempo medio tra due arrivi $1/\alpha$, dalla (1.33) si ha infine

$$\pi_0 = 1 - \rho \tag{1.60}$$

$$\pi_i = (1-\rho)\rho^i \frac{(1-\beta)^{i-1}}{(1-\alpha)^i} \qquad i > 0 \tag{1.61}$$

1.4 Catene di Markov a Tempo Continuo

Specializzando la proprietà di Markov al caso di tempo continuo e spazio discreto, otteniamo la definizione di CMTC.

DEFINIZIONE

Il processo stocastico $\{X(t), t \geq 0\}$ definito sullo spazio degli stati S è una CMTC se

$$\begin{aligned} &P\{X(t_{n+1}) = x_{n+1} \mid X(t_n) = x_n, X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \cdots, X(t_0) = x_0\} = \\ &\qquad P\{X(t_{n+1}) = x_{n+1} \mid X(t_n) = x_n\} \qquad t_{n+1} > t_n > \cdots > t_0 \end{aligned} \tag{1.62}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x_k \in S$, e per tutte le successioni $\{t_0, t_1, \cdots, t_{n+1}\}$ tali che $t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1}$.

Questa definizione è la versione a tempo continuo della (1.9), e anche in questo caso la parte destra dell'uguaglianza è detta probabilità di transizione della catena.

Usiamo la seguente notazione

$$p_{ij}(t,\theta) = P\{X(\theta) = j \mid X(t) = i\} \qquad \forall i \in S, \forall j \in S, \forall \theta > t, \forall t \geq 0 \tag{1.63}$$

per identificare la probabilità che il processo si trovi nello stato j al tempo θ, dato che si trova nello stato i al tempo t, supponendo $\theta > t$. Quando $\theta = t$ definiamo

$$p_{ij}(t,t) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \forall i \in S, \forall j \in S, \forall t \geq 0 \tag{1.64}$$

Se la CMTC è tempo omogenea, le probabilità di transizione dipendono solo dalla differenza $\tau = \theta - t$, ed è possibile semplificare la notazione scrivendo

$$p_{ij}(\tau) = P\{X(t+\tau) = j \mid X(t) = i\} \qquad \forall i \in S, \forall j \in S, \forall \tau \geq 0, \forall t \geq 0 \tag{1.65}$$

per esprimere la probabilità che il processo si trovi nello stato j dopo un intervallo di durata τ, dato che attualmente esso si trova nello stato i.

Anche in questo caso, sommando le $p_{ij}(\tau)$ su tutti i possibili stati j dello spazio degli stati S, dobbiamo ottenere come risultato 1 per tutti i valori di τ

$$\sum_{j \in S} p_{ij}(\tau) = 1 \qquad \forall i \in S, \forall t \geq 0 \tag{1.66}$$

1.4.1 Distribuzione al Tempo t

Come nel caso di tempo discreto, uno degli obiettivi dell'analisi delle CMTC è la valutazione delle probabilità che il processo si trovi nello stato i al generico tempo t. Questa probabilità è scritta come

$$\pi_i(t) = P\{X(t) = i\} \qquad \forall i \in S, \forall t \geq 0 \tag{1.67}$$

Anche in questo caso possiamo valutare $\pi_i(t)$ dalle probabilità di transizione e dalla distribuzione iniziale del processo. Utilizzando il teorema della probabilità totale abbiamo

$$\pi_i(t) = \sum_{j \in S} p_{ji}(t)\pi_j(0) \qquad \forall i \in S, \forall t \geq 0 \tag{1.68}$$

Inoltre, come nel caso di CMTD, è possibile dimostrare che la conoscenza della distribuzione iniziale e delle probabilità di transizione permette il calcolo della DDP congiunta di un qualsiasi insieme di variabili casuali estratte dal processo.

Ad esempio, supponendo di estrarre tre variabili casuali dalla CMTC $\{X(t),t \geq 0\}$ ai tempi $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$, la loro DDP congiunta è definita dalle probabilità $P\{X(\tau_1) = i, X(\tau_2) = j, X(\tau_3) = k\}$. Queste si possono calcolare come segue.

$$\begin{aligned}
& P\{X(\tau_1) = i, X(\tau_2) = j, X(\tau_3) = k\} = \\
& = \sum_{m \in S} P\{X(\tau_1) = i, X(\tau_2) = j, X(\tau_3) = k \mid X(0) = m\}\, \pi_m(0) \\
& = \sum_{m \in S} P\{X(\tau_2) = j, X(\tau_3) = k \mid X(\tau_1) = i\}\, p_{mi}(\tau_1)\, \pi_m(0) \\
& = \sum_{m \in S} P\{X(\tau_3) = k \mid X(\tau_2) = j\}\, p_{ij}(\tau_2 - \tau_1)\, p_{mi}(\tau_1)\, \pi_m(0) \\
& = \sum_{m \in S} p_{jk}(\tau_3 - \tau_2)\, p_{ij}(\tau_2 - \tau_1)\, p_{mi}(\tau_1)\, \pi_m(0)
\end{aligned}$$

Possiamo quindi concludere che la caratterizzazione probabilistica completa del processo dipende solo dalla distribuzione iniziale e dalle probabilità di transizione.

Utilizzando la proprietà di Markov (1.62) è possibile ottenere l'equazione di Chapman-Kolmogorov per CMTC

$$p_{ij}(t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(t - \theta)\, p_{kj}(\theta) \qquad \forall i \in S, \forall j \in S, \forall \theta \geq 0, \forall t \geq 0 \tag{1.69}$$

Nel caso di tempo continuo, per ottenere le probabilità di transizione è necessario risolvere un sistema di equazioni differenziali che può essere derivato dalle equazioni di Chapman-Kolmogorov. Definiamo

$$\begin{aligned}
q_{ij} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} && \forall i \in S, \forall j \in S, i \neq j && (a) \\
q_{ii} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ii}(\Delta t) - 1}{\Delta t} && \forall i \in S && (b)
\end{aligned} \tag{1.70}$$

E' possibile dimostrare che questi limiti esistono sotto opportune condizioni di regolarità. L'interpretazione intuitiva delle ultime due quantità è la seguente. Dato che il sistema si trova nello stato

i ad un certo istante t, la probabilità che avvenga una transizione verso lo stato j in un intervallo di durata Δt è $q_{ij}\ \Delta t + o(\Delta t)$. Il tasso (o la velocità) con cui il processo si muove dallo stato i verso lo stato j è quindi uguale a q_{ij}. Analogamente, $-q_{ii}\ \Delta t + o(\Delta t)$ è la probabilità che il processo si muova dallo stato i verso un qualsiasi altro stato in un intervallo di durata Δt. Quindi $-q_{ii}$ è il tasso al quale il processo lascia lo stato i. Supponiamo che q_{ij} sia finito $\forall i,j \in S$. Si noti che

$$\sum_{j \in S} q_{ij} = 0 \qquad \forall i \in S \tag{1.71}$$

Dalla (1.69) possiamo scrivere

$$p_{ij}(t + \Delta t) - p_{ij}(t) \quad = \quad \sum_{k \in S} \Big[p_{ik}(t + \Delta t - \theta) - p_{ik}(t - \theta) \Big]\ p_{kj}(\theta) \tag{1.72}$$
$$\forall i \in S, \forall j \in S, \forall \theta \geq 0, \forall t \geq 0$$

Dividendo ambro i membri per Δt e prendendo il limite per $\Delta t \to 0$ e $\theta \to t$, troviamo

$$\frac{d\, p_{ij}(t)}{dt} = \sum_{k \in S} q_{ik}\ p_{kj}(t) \qquad \forall i \in S, \forall j \in S, \forall t \geq 0 \tag{1.73}$$

Questa equazione è nota come equazione di Kolmogorov nel passato (o all'indietro). Analogamente è possibile ricavare l'equazione di Kolmogorov nel futuro (o in avanti)

$$\frac{d\, p_{ij}(t)}{dt} = \sum_{k \in S} q_{kj}\ p_{ik}(t) \qquad \forall i \in S, \forall j \in S, \forall t \geq 0 \tag{1.74}$$

Questi risultati, insieme alla (1.68), possono essere usati per ottenere un sistema di equazioni differenziali la cui soluzione fornisce la distribuzione del processo sullo spazio degli stati S ad un istante arbitrario t. Infatti, derivando la (1.68) si ha

$$\frac{d\pi_i(t)}{dt} = \sum_{j \in S} \frac{dp_{ji}(t)}{dt}\ \pi_j(0) \qquad \forall i \in S \tag{1.75}$$

che usando la (1.74) diventa

$$\frac{d\pi_i(t)}{dt} = \sum_{j \in S} \sum_{k \in S} q_{ki}\ p_{jk}(t)\ \pi_j(0) \qquad \forall i \in S \tag{1.76}$$

ora, sommando rispetto a j, usando la (1.68), si ottiene

$$\frac{d\pi_i(t)}{dt} = \sum_{k \in S} q_{ki}\ \pi_k(t) \qquad \forall i \in S \tag{1.77}$$

La soluzione esplicita di questo sistema di equazioni differenziali è difficile in molti casi, tanto che la soluzione dipendente dal tempo di molti interessanti modelli basati su CMTC può essere ottenuta solo con tecniche di integrazione numerica.

Sovente, tuttavia, non è necessario ottenere come soluzione la distribuzione dipendente dal tempo: quando esiste una soluzione di regime, questa può essere sufficiente per molte applicazioni pratiche.

1.4.2 Distribuzione di Regime

Le condizioni per l'esistenza di una distribuzione di regime dipendono, come nel caso di tempo discreto, dalla struttura della catena e dalla tipologia degli stati.

Sia h_j il *tempo di primo ingresso* nello stato j, cioè l'istante di tempo in cui il processo entra nello stato j per la prima volta dopo aver lasciato lo stato corrente. Inoltre, sia

$$f_{ij} = P\{h_j < \infty \mid X(0) = i\} \qquad \forall i \in S, \forall j \in S \tag{1.78}$$

Uno stato $j \in S$ è detto transitorio se $f_{jj} < 1$, cioè se c'è una probabilità non nulla che il processo non ritorni mai allo stato j dopo averlo lasciato. Uno stato $j \in S$ è detto ricorrente se $f_{jj} = 1$, cioè se il processo ritorna allo stato j in un tempo finito con probabilità 1.

Un sottoinsieme A dell'insieme degli stati S è detto chiuso se

$$\sum_{i \in A} \sum_{j \in \bar{A}} q_{ij} = 0 \tag{1.79}$$

In questo caso $p_{ij}(t) = 0$ per tutti gli $i \in A$, tutti i $j \in \bar{A}$, e tutti i $t > 0$. Gli stati in $\bar{A}$ non sono quindi raggiungibili dagli stati in A.

Uno stato j è detto trappola se $q_{ji} = 0$ per tutti gli $i \neq j$, quindi se $q_{jj} = 0$. Uno stato trappola costituisce un insieme chiuso di un solo elemento.

Una CMTC è detta irriducibile se nessun sottoinsieme proprio di S è chiuso, quindi se ogni stato di S può essere raggiunto da qualsiasi altro stato.

Definiamo le probabilità limite $\{\pi_j, j \in S\}$ come

$$\pi_j = \lim_{t \to \infty} \pi_j(t) \qquad \forall j \in S \tag{1.80}$$

E' possibile dimostrare che per tutte le CMTC irriducibili e omogenee tali limiti esistono e sono indipendenti dalla distribuzione iniziale $\{\pi_j(0), j \in S\}$; inoltre, quando i limiti esistono

$$\lim_{t \to \infty} \frac{d\pi_j(t)}{dt} = 0 \qquad \forall j \in S \tag{1.81}$$

per cui dalla (1.77) otteniamo il sistema di equazioni lineari

$$\sum_{j \in S} q_{ji}\pi_j = 0 \qquad \forall i \in S \tag{1.82}$$

Dato che questo sistema di equazioni è omogeneo, una possibile soluzione è $\pi_i = 0$ per tutti gli $i \in S$. Se questa è l'unica soluzione ammessa dal sistema di equazioni, allora non esiste una distribuzione stazionaria per la CMTC. Se invece esistono altre soluzioni, allora l'unica distribuzione limite per la CMTC si trova imponendo la condizione di normalizzazione

$$\sum_{i \in S} \pi_i = 1 \tag{1.83}$$

In questo caso gli stati della CMTC sono ricorrenti non nulli ed ergodici, e la catena stessa è detta ergodica.

Anche nel caso di tempo continuo le probabilità limite di una CM ergodica soddisfano la relazione

$$\pi_j = \lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) \qquad \forall j \in S \tag{1.84}$$

La distribuzione limite di una CMTC ergodica è anche detta distribuzione di equilibrio o di regime.

Il tempo medio di ricorrenza per uno stato j, M_j, è definito come il tempo medio che intercorre tra due istanti successivi ai quali il processo entra nello stato j. Si può dimostrare che

$$M_j = \frac{-1}{\pi_j\ q_{jj}} \qquad \forall j \in S \tag{1.85}$$

1.4.3 Formulazione Matriciale

Definiamo la matrice delle probabilità di transizione $\boldsymbol{P}(t)$

$$\boldsymbol{P}(t) = [p_{ij}(t)] \qquad\qquad \boldsymbol{P}(0) = \boldsymbol{I} \tag{1.86}$$

e definiamo il vettore $\boldsymbol{\pi}(t)$, i cui elementi sono le probabilità degli stati al tempo t

$$\boldsymbol{\pi}(t) = [\pi_1(t), \pi_2(t), \cdots] \tag{1.87}$$

L'equazione (1.68) può essere scritta in forma matriciale come

$$\boldsymbol{\pi}(t) = \boldsymbol{\pi}(0)\ \boldsymbol{P}(t) \tag{1.88}$$

e l'equazione di Chapman-Kolmogorov (1.69) diventa

$$\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{P}(t-\theta)\ \boldsymbol{P}(\theta) \tag{1.89}$$

Possiamo anche definire la matrice

$$\boldsymbol{Q} = [q_{ij}] \tag{1.90}$$

che viene detta *generatore infinitesimale* della matrice delle probabilità di transizione $\boldsymbol{P}(t)$, o anche *matrice dei tassi di transizione.* Le equazioni di Kolmogorov nel passato e nel futuro possono pure essere messe in forma matriciale, ottenendo, rispettivamente

$$\frac{d\boldsymbol{P}(t)}{dt} = \boldsymbol{Q}\ \boldsymbol{P}(t) \tag{1.91}$$

$$\frac{d\boldsymbol{P}(t)}{dt} = \boldsymbol{P}(t)\ \boldsymbol{Q} \tag{1.92}$$

Queste equazioni ammettono la soluzione generale

$$\boldsymbol{P}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{Q}\ t} \tag{1.93}$$

che è piuttosto elegante da un punto di vista formale, ma difficile da risolvere.

Le equazioni differenziali (1.77) che definiscono le probabilità degli stati al tempo t possono essere riscritte come

$$\frac{d\boldsymbol{\pi}(t)}{dt} = \boldsymbol{\pi}(t)\ \boldsymbol{Q} \tag{1.94}$$

Per finire, l'equazione matriciale che definisce la distribuzione di regime di una CMTC ergodica assieme alla (1.83) è

$$\boldsymbol{\pi}\ \boldsymbol{Q} = 0 \tag{1.95}$$

dove $\boldsymbol{\pi}$ è il vettore

$$\boldsymbol{\pi} = [\pi_1, \pi_2, \cdots] \tag{1.96}$$

1.4.4 Tempi di Soggiorno e di Ricorrenza

I tempi di soggiorno negli stati di una CMTC sono variabili casuali distribuite esponenzialmente, come osservato in precedenza, dato che la proprietà di Markov richiede assenza di memoria per le distribuzioni dei tempi di soggiorno, e l'unica distribuzione di variabile casuale continua che gode di assenza di memoria è l'esponenziale negativa. In particolare, chiamando W_i il tempo di soggiorno nello stato $i \in S$, è possibile dimostrare che

$$f_{W_i}(\omega_i) = -q_{ii}\, \mathrm{e}^{q_{ii}\omega_i} \qquad \omega_i \geq 0 \qquad \forall i \in S \tag{1.97}$$

Il tempo medio di soggiorno nello stato i è quindi

$$E\left[W_i\right] = -\frac{1}{q_{ii}} \qquad \forall i \in S \tag{1.98}$$

Inoltre, se definiamo il *tempo di ricorrenza nel futuro* al tempo t, $\phi(t)$, come il tempo che il processo passerà ancora nello stato in cui si trova al tempo t, o alternativamente, come la lunghezza dell'intervallo di tempo da t al primo cambio di stato, cioè

$$\phi(t) = \min\left\{\theta > 0 : X(t+\theta) \neq X(t)\right\} \tag{1.99}$$

per la proprietà di assenza di memoria della DDP dei tempi di soggiorno è possibile dimostrare che

$$P\left\{\phi(t) > x \mid X(t) = i\right\} = \mathrm{e}^{q_{ii}\, x} \qquad x \geq 0 \qquad \forall i \in S \tag{1.100}$$

Quindi il tempo di ricorrenza nel futuro è distribuito esponenzialmente con la stessa DDP del tempo di soggiorno. E' possibile vedere che lo stesso risultato vale anche per il *tempo di ricorrenza nel passato,* definito come il tempo già passato al tempo t dal processo nello stato corrente, nel caso di un processo $\{X(t), t \in (-\infty, +\infty)\}$. Invece, nel caso normale di un processo $\{X(t), t \in [0, +\infty)\}$ la distribuzione del tempo di ricorrenza nel passato è un'esponenziale troncata al valore t. In ogni caso, sia il tempo di ricorrenza nel futuro, sia il tempo di ricorrenza nel passato diventano esponenzialmente distribuiti per $t \to \infty$.

1.4.5 Il paradosso del tempo residuo

Dato che a regime sia il tempo di ricorrenza nel passato sia il tempo di ricorrenza nel futuro per una CMTC sono variabili distribuite esponenzialmente con parametro $-q_{ii}$, le medie del tempo già trascorso nello stato i e del tempo che la catena passerà nello stato i prima di un cambio di stato valgono entrambe $1/(-q_{ii})$. Questo potrebbe erroneamente portare a pensare che il tempo medio di permanenza nello stato i sia uguale a $2/(-q_{ii})$, in contrasto con la (1.98).

Per capire meglio la ragione di questo apparente paradosso si consideri il seguente esempio. Supponiamo di disporre di una partita di lampadine che vengono montate una dopo l'altra su di un particolare lampadario. Supponiamo che metà delle lampadine si rompano non appena montate, mentre le altre abbiano una vita media di due mesi. Supponiamo trascurabile il tempo di sostituzione di una lampadina. Il tempo medio di vita delle lampadine è ovviamente un mese. Se osserviamo una lampadina in funzione, questa è sicuramente una che dura due mesi (le altre si rompono subito e non sono osservabili). La sua età media è due mesi e, visto che capitiamo a caso durante il suo periodo di funzionamento, quindi mediamente a metà, la sua vita residua è un mese, anche se la vita media delle lampadine non è due mesi.

In questo esempio cominciamo a notare che, osservando un sistema (per noi una catena) ad un istante di tempo scelto a caso, si "intercettano" gli stati che ricorrono più frequentemente e che durano di più. Nel caso delle lampadine si osservano solo lampadine che sopravvivono all'installazione.

Si consideri ora la situazione in cui ci sono tre tipi di lampadine: un quarto delle lampadine si rompono subito, metà delle lampadine durano un mese e le rimanenti lampadine durano sei mesi. Considerando un intervallo di tempo τ molto lungo di funzionamento del lampadario, abbiamo una successione di vite di lampadine; il tempo τ è "occupato" in quantità proporzionale a $1/4 \times 0$ da lampadine che si rompono subito (quindi non risultano essere osservabili), in quantità proporzionale a $2/4 \times 1$ da lampadine che durano un mese, e in quantità proporzionale a $1/4 \times 6$ da lampadine che durano sei mesi. Perciò, se osserviamo una lampadina in funzione sul nostro lampadario ad un istante di tempo scelto a caso, cioè uniformemente distribuito in τ, osserviamo con probabilità $\frac{2/4}{2/4+6/4} = 2/8$ una lampadina che dura in tutto un mese e con probabilità $1 - 2/8 = 6/8$ una lampadina che dura in tutto sei mesi. Essendo l'istante di tempo scelto a caso, l'età media della lampadina osservata è $\frac{2}{8}0.5 + \frac{6}{8}3 = \frac{19}{8} = 2.375$ mesi, mentre la vita media delle lampadine vale $\frac{1}{4}0 + \frac{1}{2}1 + \frac{1}{4}6 = 2$ mesi.

Generalizziamo ora queste osservazioni ad una successione di istanze di una variabile casuale continua V che rappresenta un tempo, quale ad esempio una successione di tempi di interarrivo. Scegliendo un istante di tempo t a caso si intercetta un'istanza di V. L'istanza intercettata al tempo t può essere a sua volta descritta da una variabile casuale X, che però non ha la stessa distribuzione di V. Infatti X risente, oltre che della probabilità che V assuma i suoi valori (quindi della densità f_V), anche del valore assunto: intervalli di tempo più lunghi sono più facili da intercettare. Quindi è lecito ipotizzare (anche se qui occorrerebbe una derivazione più rigorosa) che $f_X(x) = Kxf_V(x)$, dove K è una opportuna costante di normalizzazione. Il calcolo di tale costante ci porta al risultato

$$f_X(x) = \frac{xf_V(x)}{m_1}$$

dove m_1 è il primo momento (media) della variabile casuale V. Sapendo che X assume il valore x, il tempo residuo medio di X vale $x/2$, per cui la media del tempo residuo può essere ottenuta come

$$\int_0^\infty \frac{x}{2}\frac{xf_V(x)}{m_1} = \frac{m_2}{2m_1} \tag{1.101}$$

dove m_2 è il secondo momento della variabile casuale V.

Più in generale, indicando con Y il tempo residuo di X (da t fino al prossimo cambio di valore nella successione di istanze di V), possiamo affermare che la densità di probabilità di Y condizionata a X è uniforme, quindi scrivere

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{1}{x} \qquad 0 \le y \le x$$

essendo l'istante t scelto a caso in x. La densità congiunta di X e Y vale allora:

$$f_{XY}(x,y) = f_{Y|X}(y \mid x)f_X(x) = \frac{1}{x}\frac{xf_V(x)}{m_1} = \frac{f_V(x)}{m_1} \qquad 0 \le y \le x$$

Integrando su x, otteniamo la densità di Y:

$$f_Y(y) = \int_{x=y}^\infty \frac{f_V(x)}{m_1}\,dx = \frac{1 - F_V(y)}{m_1} \qquad y \ge 0$$

Da questa densità di probabilità si possono ottenere tutti i momenti r_n di Y in funzione dei momenti m_n di X (ad esempio passando attraverso la funzione caratteristica di Y):

$$r_n = \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_n}$$

di cui la (1.101) è un caso particolare.

Ritornando al caso in cui V è una variabile casuale esponenziale con parametro $-q_{ii}$, abbiamo $m_1 = -1/q_{ii}$ e $m_2 = 2/q_{ii}^2$, per cui la media del tempo residuo vale $-1/q_{ii}$, in accordo con i risultati visti nel paragrafo precendente.

I risultati ottenuti in questo paragrafo fanno parte di un argomento più vasto detto *teoria del rinnovamento* (in inglese *renewal theory*), che tratta della sostituzione istantanea di componenti negli studi di affidabilità (da cui deriva in parte la nostra terminologia: età, vita, tempo residuo, ecc.), nella quale però noi non ci addentriamo ulteriormente.

1.4.6 Il Processo di Nascita e Morte

Come primo esempio di CMTC analizziamo il processo *di Nascita e Morte* (N-M) (in inglese: *Birth and Death (B-D) process*). Un processo N-M è una CMTC definita sullo spazio degli stati $S = \{0,1,2,\cdots\}$ che può solo avere transizioni tra stati adiacenti, quindi solo "salti" di indice stato di ampiezza ± 1. E' quindi possibile scrivere gli elementi del generatore infinitesimale come

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & j = i+1, \quad i \geq 0 \\ \mu_i & j = i-1, \quad i \geq 1 \\ -(\lambda_i + \mu_i) & j = i, \quad i \geq 1 \\ -\lambda_0 & j = i = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{1.102}$$

per tutti gli $i,j \in S$. I parametri λ_i e μ_i sono i tassi di nascita e di morte nello stato i, e rappresentano le velocità con cui il processo esce dallo stato i verso gli stati $i+1$ e $i-1$, rispettivamente. Supponiamo che $\lambda_i > 0$ per tutti gli $i \in S$, che $\mu_0 = 0$, e che $\mu_i > 0$ per tutti gli $i > 0$.

Il nome di questo processo deriva dal fatto che esso costituisce un modello adatto a descrivere l'evoluzione di una popolazione di individui.

Il processo N-M può essere rappresentato anche con il suo diagramma dei tassi di transizione, mostrato nella figura 1.8. Ogni cerchio rappresenta uno stato, il cui indice è scritto al centro. Gli archi indicano la possibilità di transizione da uno stato ad un altro, e sono etichettati con i tassi di transizione. Per la struttura del processo N-M, sono possibili solo transizioni tra stati strettamente adiacenti; quando il diagramma dei tassi di transizione viene invece usato per descrivere una generica CMTC, gli archi connettono anche stati non adiacenti.

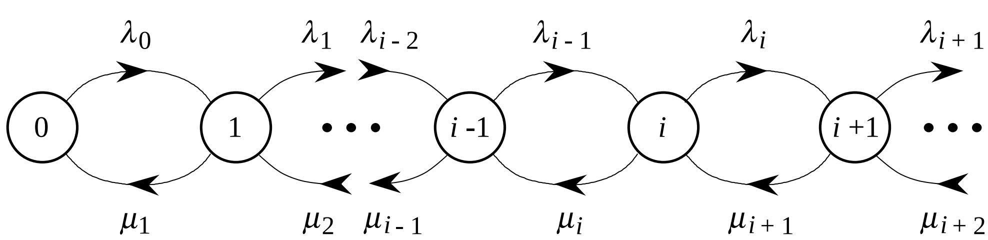

Figura 1.8. Diagramma dei tassi di transizione per un processo di nascita e morte

Le probabilità degli stati al tempo t possono essere trovate risolvendo l'insieme di equazioni differenziali

$$\begin{aligned} \frac{d\pi_i(t)}{dt} &= -(\lambda_i + \mu_i)\ \pi_i(t)\ +\ \lambda_{i-1}\ \pi_{i-1}(t)\ +\ \mu_{i+1}\ \pi_{i+1}(t) \qquad i \geq 1 \\ \frac{d\pi_0(t)}{dt} &= -\lambda_0\ \pi_0(t)\ +\ \mu_1\ \pi_1(t) \end{aligned} \tag{1.103}$$

che si ottiene specializzando la (1.77) a questo caso. La soluzione di tale sistema è difficile in generale. Ne forniremo una soluzione in un caso particolare nel prossimo paragrafo.

Le probabilità limite del processo N-M, definite nella (1.80) esistono di sicuro, dato che il processo N-M è una CMTC omogenea e irriducibile. E' quindi possibile specializzare la (1.82) in questo caso per trovare

$$\begin{aligned} -(\lambda_i + \mu_i)\ \pi_i\ +\ \lambda_{i-1}\ \pi_{i-1}\ +\ \mu_{i+1}\ \pi_{i+1} = 0 \qquad i \geq 1 \\ -\lambda_0\ \pi_0 + \mu_1\ \pi_1 = 0 \end{aligned} \tag{1.104}$$

Si noti che queste equazioni possono essere ottenute direttamente dal diagramma dei tassi di transizione uguagliando il *flusso* entrante ed uscente in ogni stato. Il flusso tra due stati è ottenuto moltiplicando la probabilità associata allo stato di partenza per la velocità di transizione. Per esempio, il flusso dallo stato i allo stato j vale $q_{ij}\ \pi_i$. Il flusso entrante nello stato i è la somma di tutti i flussi da qualsiasi stato k allo stato i. In formule

$$\text{flusso entrante nello stato } i = \sum_{k \in S} \pi_k\ q_{ki} \qquad \forall i \in S \tag{1.105}$$

ed analogamente per il flusso uscente

$$\text{flusso uscente dallo stato } i = \sum_{k \in S} \pi_i\ q_{ik} \qquad \forall i \in S \tag{1.106}$$

Nel caso del processo N-M, il flusso entrante nello stato i viene dallo stato $i-1$ con tasso λ_{i-1} e dallo stato $i+1$ con tasso μ_{i+1}. Otteniamo quindi

$$\text{flusso entrante nello stato } i = \lambda_{i-1}\ \pi_{i-1}\ +\ \mu_{i+1}\ \pi_{i+1} \qquad i \geq 1 \tag{1.107}$$

e

$$\text{flusso uscente dallo stato } i = (\lambda_i + \mu_i)\ \pi_i \qquad i \geq 1 \tag{1.108}$$

Uguagliando questi due flussi, utilizzando l'osservazione che analoghe equazioni valgono nel caso $i = 0$, ponendo $\mu_0 = \lambda_{-1} = 0$, e riaggiustando opportunamente i termini, riotteniamo le equazioni (1.104).

La soluzione ricorsiva della (1.104) si può ottenere in modo simile a quanto fatto per il caso di tempo discreto. Il procedimento porta al risultato

$$\pi_{i+1}\ =\ \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}\ \pi_i \qquad \forall i \in S \tag{1.109}$$

Si noti che anche queste equazioni possono essere ricavate direttamente dal diagramma dei tassi di transizione della figura 1.8 uguagliando i flussi attraverso le frontiere verticali tra due stati adiacenti. Possiamo sostituire ulteriormente in modo ricorsivo per ottenere

$$\pi_i\ =\ \pi_0 \prod_{k=0}^{i-1} \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} \qquad \forall i \in S \tag{1.110}$$

Imponendo la condizione di normalizzazione (1.83) otteniamo infine

$$\pi_0 \; = \; \frac{1}{1 \; + \; \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}} \tag{1.111}$$

Quindi esiste una distribuzione limite se

$$\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}} \; < \; \infty \tag{1.112}$$

In questo caso il processo N-M è ergodico, e le probabilità di regime sono date da

$$\pi_i \; = \; \frac{\prod_{k=0}^{i-1} \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}}}{1 \; + \; \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}} \tag{1.113}$$

per tutti gli $i \in S$.

1.4.7 Il Processo di Poisson

Si consideri un processo di pura nascita con tasso di nascita costante pari a λ. Possiamo vedere questo processo come un caso particolare di processo N-M, dato che è stato ottenuto ponendo $\mu_i = 0$ per tutti gli i, e $\lambda_i = \lambda$ per tutti gli $i \geq 0$. Questo processo è noto come *processo di Poisson.* Ovviamente, dato che le morti non sono possibili, il processo può avere solo variazioni di indice di stato di grandezza $+1$; è quindi impossibile ritornare in uno stato dopo averlo lasciato: tutti gli stati sono transitori e non esiste una distribuzione di regime.

In questo caso molto semplice è tuttavia possibile risolvere esplicitamente l'insieme di equazioni differenziali (1.103), che si riduce a

$$\begin{aligned} \frac{d\pi_i(t)}{dt} &= -\lambda \; \pi_i(t) \; + \; \lambda \; \pi_{i-1}(t) \qquad i \geq 1 \\ \frac{d\pi_0(t)}{dt} &= -\lambda \; \pi_0(t) \end{aligned} \tag{1.114}$$

Supponendo che il processo evolva a partire dallo stato 0 al tempo $t = 0$, cioè che

$$\pi_i(0) \; = \; \begin{cases} 1 & i = 0 \\ 0 & i \neq 0 \end{cases} \tag{1.115}$$

è possibile risolvere la seconda equazione differenziale, ottenendo

$$\pi_0(t) \; = \; \mathrm{e}^{-\lambda t} \qquad t \geq 0 \tag{1.116}$$

Utilizzando questo risultato è possibile risolvere ricorsivamente tutte le altre equazioni, ottenendo nel caso generale

$$\pi_i(t) \; = \; \frac{(\lambda t)^i}{i!} \, \mathrm{e}^{-\lambda t} \qquad t \geq 0 \tag{1.117}$$

per tutti gli $i \in S$. Questa DDP è una distribuzione di Poisson con parametro λt.

Una definizione alternativa del processo di Poisson è la seguente. Un processo di Poisson è un processo stocastico a tempo continuo con spazio degli stati $S = \{0,1,2,\cdots\}$, che può avere solo variazioni di indice di stato di ampiezza $+1$, nel quale gli intervalli tra i salti di stato sono variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite la cui DDP è esponenziale con parametro λ.

1.4.8 La Coda $M/M/1$

Si consideri un modello a coda a singolo servitore in tempo continuo in cui gli arrivi dei clienti seguono un processo di Poisson a velocità λ ed i tempi di servizio sono esponenzialmente distribuiti con valor medio μ^{-1}. Tale coda viene indicata (sempre secondo la notazione di Kendall) con la sigla $M/M/1$.

Il fatto che le densità di probabilità delle variabili casuali relative ai tempi tra due arrivi consecutivi ed ai tempi di servizio siano esponenziali e quindi prive di memoria garantisce che, prendendo come definizione di stato del sistema il numero di clienti in attesa o in servizio (numero di clienti nella coda), il modello del sistema sia una catena di Markov a tempo continuo con $S = \{0,1,2,\cdots\}$.

Gli elementi del generatore infinitesimale possono essere scritti come

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda & i \geq 0, j = i+1 \\ \mu & i > 0, j = i-1 \\ -\lambda & i = 0, j = 0 \\ -(\lambda+\mu) & i > 0, j = i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si può immediatamente verificare che il modello risultante è una catena di Markov di nascita e morte con velocità di nascita e di morte costanti, per cui, dalla (1.110) si ricava

$$\pi_i = \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \qquad i \geq 0 \tag{1.118}$$

con [dalla (1.111)]

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i} \tag{1.119}$$

La sommatoria a denominatore converge se $\frac{\lambda}{\mu} < 1$. In questo caso la catena è ergodica e si ottiene

$$\pi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \tag{1.120}$$

$$\pi_i = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \quad i > 0 \tag{1.121}$$

Ponendo $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, cioè identificando con ρ il rapporto tra il tempo medio di servizio ed il tempo medio tra due arrivi, si ha infine

$$\pi_0 = 1 - \rho \tag{1.122}$$

$$\pi_i = (1-\rho)\rho^i \qquad i > 0 \tag{1.123}$$

1.4.9 La Catena di Markov Interna

Consideriamo la realizzazione di una CMTC $\{X(t), t \geq 0\}$ mostrata nella figura 1.9. La sequenza stocastica $\{Y_n, n \geq 0\}$ è una CMTD, che viene detta *catena di Markov interna* (CMI) del processo $X(t)$. I due processi hanno identico spazio degli stati S.

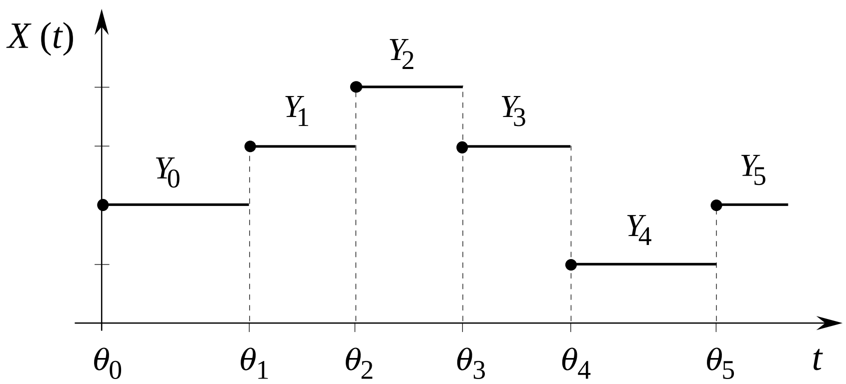

Figura 1.9. Possibile realizzazione di una CMTC (o di un PSM) dalla quale è possibile derivare una CMI

Le probabilità di transizione della CMI, r_{ij}, sono definite come

$$r_{ij} = P\{Y_{n+1} = j \mid Y_n = i\} \qquad \forall i \in S, \forall j \in S \tag{1.124}$$

Si noti che, per tutti i tempi t,

$$r_{ij} = P\{X[t + \phi(t)] = j \mid X(t) = i\} \qquad \forall i \in S, \forall j \in S \tag{1.125}$$

Introducendo le variabili θ_n che compaiono nella figura 1.9 e utilizzando le proprietà delle CMTC, è facile dimostrare che

$$P\{Y_{n+1} = j, \theta_{n+1} - \theta_n > \tau \mid Y_n = i\} = r_{ij}\ \mathrm{e}^{q_{ii}\ \tau} \qquad \forall i \in S, \forall j \in S, \forall \tau \geq 0 \tag{1.126}$$

e che le probabilità di transizione r_{ij} possono essere ottenute come funzione dei tassi di transizione q_{ij}. In effetti, nel caso di una CMTC ergodica,

$$r_{ij} = \begin{cases} -q_{ij}/q_{ii} & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases} \tag{1.127}$$

Per il modo in cui la CMI è stata definita, i tempi di permanenza nei suoi stati sono costanti pari a 1.

Se la CMTC $\{X(t), t \geq 0\}$ è ergodica, allora la CMTD $\{Y_n, n \geq 0\}$ è irriducibile e ricorrente (ma potrebbe essere periodica e quindi non ergodica), e la distribuzione di regime del processo $X(t)$ può essere determinata dalla distribuzione stazionaria della sequenza Y_n. Sia

$$\pi_j^{(X)} = \lim_{t \to \infty} P\{X(t) = j\} \qquad \forall j \in S \tag{1.128}$$

e chiamiamo $\pi_j^{(Y)}$ le grandezze ottenute risolvendo il sistema di equazioni lineari che dà la distribuzione stazionaria della CMTD $\{Y_n, n \geq 0\}$

$$\pi_j^{(Y)} = \sum_{i \in S} \pi_i^{(Y)} \, r_{ij} \qquad \forall j \in S \tag{1.129}$$

$$\sum_{i \in S} \pi_i^{(Y)} = 1 \tag{1.130}$$

Si può dimostrare che le probabilità di regime della CMTC $X(t)$ sono

$$\pi_j^{(X)} = \frac{\pi_j^{(Y)} / - q_{jj}}{\sum_{i \in S} \left[\pi_i^{(Y)} / - q_{ii} \right]} \qquad \forall j \in S \tag{1.131}$$

o, alternativamente,

$$\pi_j^{(X)} = \frac{1/ - q_{jj}}{\sum_{i \in S} \left[\pi_i^{(Y)} / - q_{ii} \, \pi_j^{(Y)} \right]} = \frac{E\left[W_j^{(X)}\right]}{\sum_{i \in S} v_{ij} \, E\left[W_i^{(X)}\right]} \qquad \forall j \in S \tag{1.132}$$

dove $W_j^{(X)}$ è il tempo medio di soggiorno nello stato j misurato sul processo $X(t)$, e i v_{ij} sono i rapporti di visita relativi alla CMI. Quindi la probabilità di regime di un generico stato j di una CMTC può essere valutata come il rapporto tra il tempo medio di soggiorno nello stato j e la somma dei prodotti dei tempi medi di soggiorno negli stati i dello spazio degli stati S moltiplicati per i rapporti di visita v_{ij}, cioè per il numero medio di volte che il processo visita lo stato i tra due successive visite allo stato j.

Si noti che stiamo considerando una porzione delle realizzazioni del processo che inizia con l'ingresso nello stato j e finisce appena prima del prossimo ingresso nello stato j. Chiamiamo *cicli* queste porzioni delle realizzazioni. La probabilità di regime dello stato j è ottenuta dividendo la quantità media di tempo passata nello stato j durante un ciclo per la durata media dei cicli.

Esempio

A titolo di esempio, vediamo come si può ricavare la distribuzione a regime della coda $M/M/1$ utilizzando la (1.131).

Il diagramma di transizione tra stati della CMI è ottenuto dal diagramma delle velocità di transizione della $M/M/1$ semplicemente dividendo l'etichetta di ogni arco uscente da ogni stato i per $-q_{ii}$. Il risultato è mostrato nella figura 1.10. La CMTD così ottenuta è omogenea, irriducibile, ma periodica con periodo 2 e dunque non è ergodica.

Il calcolo della distribuzione stazionaria, definita dalla (1.26), porta al risultato della (1.49) che, nel nostro caso particolare, fornisce

$$\pi_i^{(Y)} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^{i-1}}{\left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^{i}} \, \pi_0^{(Y)} = \frac{\lambda + \mu}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i} \pi_0^{(Y)} \qquad i \geq 0 \tag{1.133}$$

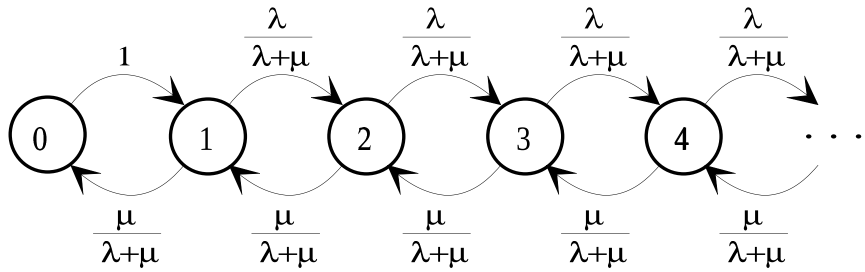

Figura 1.10. Diagramma di transizione della catena interna della $M/M/1$

Ora, imponendo la condizione di normalizzazione

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i^{(Y)} = 1 \tag{1.134}$$

si ottiene

$$\pi_0^{(Y)} = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda+\mu}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \tag{1.135}$$

e finalmente

$$\pi_i^{(Y)} = \frac{\lambda+\mu}{2\lambda}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \qquad i > 0 \tag{1.136}$$

Ora, dalla (1.131), trascurando in un primo tempo la normalizzazione, si ricavano dapprima le $\hat{\pi}_i^{(X)}$, che poi si normalizzeranno per ottenere il risultato finale. Si ha

$$\hat{\pi}_0^{(X)} = \frac{\pi_0^{(Y)}}{\lambda} = \frac{1}{2\lambda}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \tag{1.137}$$

e

$$\hat{\pi}_i^{(X)} = \frac{\pi_i^{(Y)}}{\lambda+\mu} = \frac{1}{2\lambda}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \quad i > 0 \tag{1.138}$$

Imponendo la normalizzazione

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha \hat{\pi}_i^{(X)} = 1$$

si ottiene $\alpha = 2\lambda$, quindi $\pi_i^{(X)} = \hat{\pi}_i^{(X)} 2\lambda$, da cui il risultato delle (1.122) e (1.123).

1.5 Aggregazione di Stati in Catene di Markov

I modelli markoviani di sistemi reali comprendono molto spesso un numero di stati finito ma molto grande, tale da rendere il calcolo delle distribuzioni al tempo t e a regime estremamente pesante in termini di tempi di CPU e memoria. D'altra parte, spesso i modelli contengono un elevato grado di simmetria, che può essere sfruttato per ridurre la complessità dei calcoli definendo un modello semplificato che comprenda un numero ridotto di macrostati, ciascuno risultante dall'aggregazione di un gruppo degli stati del modello di partenza.

Nel seguito esamineremo questo aspetto, fornendo le condizioni per l'esistenza di un modello Markoviano compatto, sia nel caso di CMTD, sia nel caso di CMTC.

1.5.1 Aggregazione in CMTD

Si consideri una CMTD finita ed ergodica $\{X_n, n = 0,1,\cdots\}$ con spazio degli stati $S = \{1,2,\cdots,N\}$, matrice delle probabilità di transizione $\boldsymbol{P}$, distribuzione $\boldsymbol{\pi}(n)$ al passo n e distribuzione di regime $\boldsymbol{\pi}$.

Si definisca una partizione di S aggregando gruppi di stati in macrostati A_I tali che

$$S = \bigcup_{I=1}^{M} A_I \quad \text{e} \quad A_I \cap A_J = \emptyset \quad \forall\, I \neq J \tag{1.139}$$

Si può definire una nuova sequenza stocastica $\{Y_n, n = 0,1,\cdots\}$ sullo spazio dei macrostati $S' = \{A_1, A_2, \cdots, A_M\}$.

Al fine di determinare se questa nuova sequenza stocastica sia una CMTD ergodica si devono considerare le probabilità condizionate

$$P\{Y_{n+1} = A_J \mid Y_n = A_I, Y_{n-1} = A_K, \cdots, Y_0 = A_L\} \tag{1.140}$$

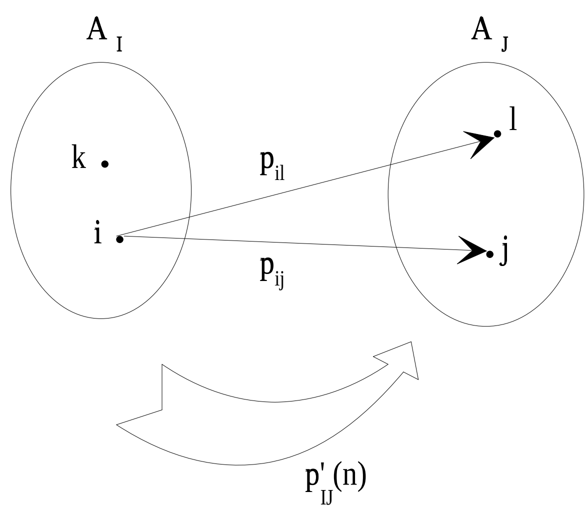

Figura 1.11. Probabilità di transizione tra stati e macrostati

Se queste dipendono solo dal macrostato più recente A_I, la sequenza $\{Y_n, n \geq 0\}$ è una CMTD con probabilità di transizione (si veda la figura 1.11)

$$p'_{IJ}(n) = P\{Y_{n+1} = A_J \mid Y_n = A_I\} \qquad \forall A_I \in S', \forall A_J \in S'$$

Sommando su tutti gli stati i nel macrostato A_I e su tutti gli stati j nel macrostato A_J, si ottiene

$$p'_{IJ}(n) \;=\; \sum_{i\in A_I}\;\sum_{j\in A_J} p_{ij}\;\nu_{i|I}(n) \qquad \forall A_I \in S', \forall A_J \in S' \qquad\qquad (a)$$

dove $$(1.141)$$

$$\nu_{i|I}(n) \;=\; \frac{\pi_i(n)}{\sum_{k\in A_I}\;\pi_k(n)} \qquad \forall i \in S, \forall A_I \in S' \qquad\qquad (b)$$

rappresenta la probabilità condizionata che la catena X sia nello stato $i \in A_I$, dato che la catena Y è nel macrostato A_I.

Si può dimostrare che una condizione necessaria e sufficiente perché la catena $\{Y_n, n \geq 0\}$ sia una CMTD ergodica è che

$$\sum_{j\in A_J} p_{ij} \;=\; p'_{IJ}(n) \qquad \forall i \in A_I, \forall A_I \in S', \forall A_J \in S' \tag{1.142}$$

e per tutti gli n. In tal caso le probabilità condizionate (1.140) dipendono infatti solo dal macrostato presente A_I e la dipendenza da n nella (1.141) sparisce. La condizione (1.142) è detta *condizione di aggregabilità* della CMTD $\{X_n, n \geq 0\}$ rispetto ai macrostati in S'. La CMTD $\{Y_n, n \geq 0\}$ è detta catena *aggregata.*

Se siamo interessati solo al calcolo della distribuzione limite della catena aggregata, dalle equazioni per la catena $\{X_n, n \geq 0\}$

$$\begin{aligned} \pi_j &= \sum_{i\in S} \pi_i\; p_{ij} \qquad \forall j \in S \qquad\qquad (a) \\ \sum_{j\in S} \pi_j &= 1 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad (b) \end{aligned} \tag{1.143}$$

sommando su tutti gli stati j nel macrostato A_J

$$\sum_{j\in A_J} \pi_j = \pi'_J = \sum_{j\in A_J}\;\sum_{A_I\in S'}\;\sum_{i\in A_I} \pi_i\; p_{ij}$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned} \pi'_J &= \sum_{A_I\in S'} \pi'_I\; p'_{IJ} \qquad \forall A_J \in S' \qquad\qquad (a) \\ \sum_{A_J\in S'} \pi'_J &= 1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (b) \end{aligned} \tag{1.144}$$

dove

$$\pi'_J = \lim_{n\to\infty}\; P\{X_n \in A_J\} = \sum_{j\in A_J} \pi_j \qquad \forall A_J \in S' \tag{1.145}$$

e

$$p'_{IJ} = \sum_{i\in A_I}\sum_{j\in A_J} p_{ij}\;\nu_{i|I} \qquad \forall A_I \in S', \forall A_J \in S' \tag{1.146}$$

con

$$\nu_{i|I} = \frac{\pi_i}{\sum\limits_{k \in A_I} \pi_k} \qquad \forall i \in S, \forall A_I \in S' \tag{1.147}$$

Le relazioni appena ottenute valgono per ogni CMTD, indipendentemente dal soddisfacimento della condizione di aggregabilità. Se tale condizione è verificata, le p'_{IJ} possono essere calcolate come

$$p'_{IJ} = \sum_{j \in A_J} p_{ij}$$

senza dover calcolare le probabilità degli stati della catena non aggregata. Anche quando la condizione di aggregabilità (1.142) non è verificata, esistono dei casi particolari per i quali si possono calcolare le p'_{IJ} prescindendo dalla conoscenza delle probabilità π_i che compaiono nella (1.147). Ad esempio, se la conoscenza del sistema in esame consente di affermare che gli n stati appartenenti al macrostato A_I sono equiprobabili, possiamo scrivere

$$p'_{IJ} = \frac{1}{n} \sum_{i \in A_I} \sum_{j \in A_J} p_{ij}$$

1.5.2 Aggregazione in CMTC

Si consideri una CMTC finita ed ergodica $\{X(t), t \geq 0\}$ con spazio degli stati $S = \{1, 2, \cdots, N\}$, generatore infinitesimale $\boldsymbol{Q}$, matrice delle probabilità di transizione $\boldsymbol{P}(t)$, distribuzione $\boldsymbol{\pi}(t)$ al tempo t, e distribuzione di regime $\boldsymbol{\pi}$.

Anche in questo caso definiamo una partizione di S per aggregazione di gruppi di stati in macrostati A_I tali per cui valga la (1.139), e identifichiamo un nuovo processo stocastico $\{Y(t), t \geq 0\}$ sullo spazio dei macrostati $S' = \{A_1, A_2, \cdots, A_M\}$.

La condizione necessaria e sufficiente affinché questo nuovo processo sia una CMTC è che

$$\sum_{j \in A_J} q_{ij} \; = \; q'_{IJ} \qquad \forall i \in A_I, \forall A_I \in S', \forall A_J \in S' \tag{1.148}$$

Le q'_{IJ} sono gli elementi di un nuovo generatore infinitesimale $\boldsymbol{Q}'$ relativo al processo $\{Y(t), t \geq 0\}$.

L'equazione (1.148) rappresenta la condizione di aggregabilità per la CMTC $\{X(t), t \geq 0\}$ rispetto all'insieme di macrostati S'. La condizione di aggregabilità implica anche che

$$\sum_{j \in A_J} p_{ij}(t) \; = \; p'_{IJ}(t) \qquad \forall i \in A_I, \forall A_I \in S', \forall A_J \in S' \tag{1.149}$$

dove le $p'_{IJ}(t)$ sono gli elementi della matrice delle probabilità di transizione al tempo t, $\boldsymbol{P}'(t)$, riferita alla CMTC $\{Y(t), t \geq 0\}$.

Se siamo unicamente interessati al calcolo delle probabilità limite dei macrostati, definite come

$$\pi'_I \; = \; \lim_{t \to \infty} P\left\{X(t) \in A_I\right\} \; = \; \sum_{i \in A_I} \pi_i \qquad \forall A_I \in S', \forall A_J \in S' \tag{1.150}$$

è possibile, partendo dalle equazioni per la CMTC $\{X(t), t \geq 0\}$,

$$\begin{aligned} &\sum_{i \in S} \pi_i \, q_{ij} = 0 \qquad \forall j \in S \qquad && (a) \\ &\sum_{i \in S} \pi_i = 1 && (b) \end{aligned} \tag{1.151}$$

scomporre la sommatoria in più sommatorie

$$\sum_{j\in A_J} \sum_{A_I\in S'} \sum_{i\in A_I} \pi_i \, q_{ij} = 0$$

e sommare rispetto a tutti gli stati $j \in A_J$

$$\sum_{A_I\in S'} \pi'_I \sum_{j\in A_J} \sum_{i\in A_I} \frac{\pi_i}{\sum_{k\in A_I} \pi_k} \, q_{ij} = 0$$

ricavando

$$\begin{aligned} &\sum_{A_I\in S'} \pi'_I \, q'_{IJ} = 0 \qquad \forall A_J \in S' \qquad &(a) \\ &\sum_{A_I\in S'} \pi'_I = 1 \qquad &(b) \end{aligned} \tag{1.152}$$

dove

$$q'_{IJ} = \sum_{i\in A_I} \sum_{j\in A_J} q_{ij} \, \nu_{i|I} \qquad \forall A_I \in S', \forall A_J \in S' \tag{1.153}$$

Come nel caso di aggregazioni su CMTD, il calcolo delle probabilità di transizione tra macrostati p'_{IJ} richiede in generale la conoscenza delle π_i, quindi la soluzione della catena non aggregata. Tale conoscenza non è richiesta quando è verificata la condizione di aggregabilità e in alcuni casi particolari, per i quali le probabilità π_i degli stati di ogni macrostato sono legate da relazioni semplici.

Esempio

Si consideri il sistema di code mostrato nella figura 1.12. Gli arrivi al sistema seguono un processo

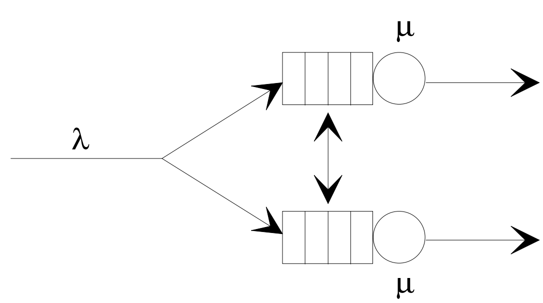

Figura 1.12. Sistema di code con spazio degli stati aggregabile

di Poisson con velocità λ. I clienti arrivando scelgono la coda più corta e, a pari lunghezza, scelgono a caso una delle due code con ugual probabilità. I tempi di servizio ad entrambe le code sono esponenzialmente distribuiti con media $1/\mu$. Alla partenza di un cliente che ha terminato il suo servizio, i clienti si spostano da una coda all'altra se così facendo riescono a migliorare la loro posizione. Lo spostamento avviene contemporaneamente alla partenza ed istantaneamente. I clienti che si spostano vanno a mettersi in fondo alla nuova coda.

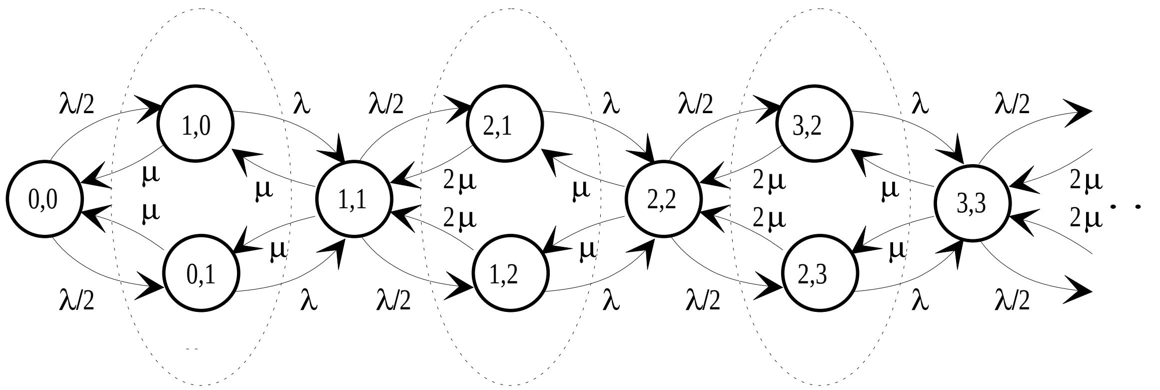

Figura 1.13. Diagramma delle velocità di transizione per la CMTC corrispondente al sistema della figura 1.12

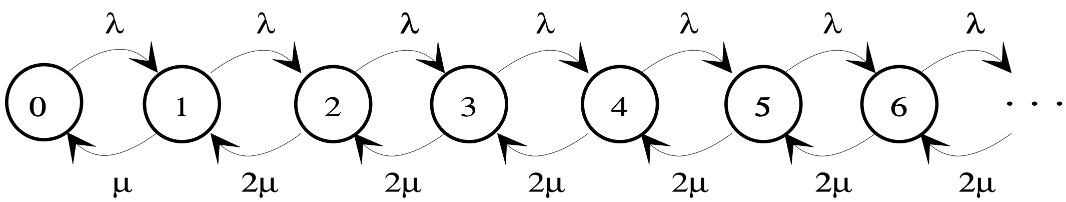

Figura 1.14. Diagramma delle velocità di transizione della figura 1.13 aggregata

Identificando lo stato del sistema con la coppia (n_1,n_2), dove n_i è il numero di clienti alla coda i, si ottiene il diagramma delle velocità di transizione della catena di Markov tempo continua che modella il funzionamento del sistema mostrato nella figura 1.13. Aggreghiamo le coppie di stati del tipo $(k+1,k),(k,k+1)$ in macrostati che chiamiamo A_{2k+1}, ottenendo il diagramma di transizione mostrato nella figura 1.14. E' quindi possibile identificare una catena sull'insieme degli stati

$$A_I = \begin{cases} \{(k,k)\} & \text{se } I = 2k \\ \{(k+1,k),(k,k+1)\} & \text{se } I = 2k+1 \end{cases}$$

Per ragioni di simmetria i due stati nei macrostati A_{2k+1} sono equiprobabili, per cui il calcolo delle $\nu_{i|I}$ della (1.147) può essere effettuato senza conoscere la soluzione della catena non aggregata. Da queste è possibile calcolare le p'_{IJ} utlizzando la (1.146) e risolvere la catena aggregata.

La catena definita sui macrostati gode però anche della proprietà di aggregabilità:

$$\begin{cases} p'_{2k+1,2k+2} = p_{(k+1,k),(k+1,k+1)} = p_{(k,k+1),(k+1,k+1)} = \lambda & \text{per } k \geq 0 \\ p'_{2k+1,2k} = p_{(k+1,k),(k,k)} = p_{(k,k+1),(k,k)} = 2\mu & \text{per } k > 0 \\ p'_{1,0} = p_{(1,0),(0,0)} = p_{(0,1),(0,0)} = \mu \end{cases}$$

Essa è quindi una catena di Markov per cui sono note le probabilità di transizione.

La definizione dei macrostati coincide con l'identificazione dello stato del sistema con il numero totale di clienti in esso contenuti. Il diagramma delle velocità di transizione della catena aggregata coincide con quello di una coda di tipo $M/M/2$ (che vedremo nel paragrafo 2.2). La soluzione stazionaria è

$$\begin{cases} \pi'_0 &= \dfrac{2\mu-\lambda}{2\mu+\lambda} \\ \pi'_n &= 2\left(\dfrac{\lambda}{2\mu}\right)^n \pi'_0 \qquad \text{per } n>0 \end{cases}$$

Da questa è possibile ricavare la soluzione della catena non aggregata:

$$\begin{cases} \pi_{(k,k)} &= \pi'_{2k} \\ \pi_{(k+1,k)} &= \pi_{(k,k+1)} = \dfrac{\pi'_{2k+1}}{2} \end{cases}$$

1.6 Processi Semi-Markov

Si consideri la realizzazione del processo a tempo continuo e con spazio degli stati discreto S mostrata nella figura 1.9. Si supponga che il processo $\{X(t),t \geq 0\}$ sia tempo omogeneo e cambi stato negli istanti θ_n, $n = 0,1,\cdots$, assumendo il valore Y_n nell'intervallo $[\theta_n,\theta_{n+1})$. Si supponga ancora che

$$\begin{aligned} &P\{Y_{n+1} = j,\theta_{n+1}-\theta_n \leq \tau \mid Y_0 = k,\cdots,Y_n = i;\ \theta_0 = t_0,\cdots,\theta_n = t_n\} \\ &\quad = P\{Y_{n+1} = j,\theta_{n+1}-\theta_n \leq \tau \mid Y_n = i\} = H_{ij}(\tau) \qquad \forall i \in S, \forall j \in S \end{aligned} \tag{1.154}$$

e si abbia

$$p_{ij} \ = \ P\{Y_{n+1} = j \mid Y_n = i\} \ = \ \lim_{\tau\to\infty} H_{ij}(\tau) \qquad \forall i \in S, \forall j \in S \tag{1.155}$$

Nel processo stocastico considerato, i tempi di soggiorno negli stati sono variabili casuali con ddp arbitrarie. Inoltre, tali ddp possono dipendere, oltre che dallo stato attuale, anche da quello prossimo.

Un processo siffatto viene detto processo semi-Markov (PSM).

La DDP del tempo trascorso nello stato i, condizionata al fatto che il prossimo stato sia j, è

$$\begin{aligned} G_{ij}(\tau) &= P\{\theta_{n+1}-\theta_n \leq \tau \mid Y_{n+1} = j, Y_n = i\} \\ &= \frac{P\{Y_{n+1} = j, \theta_{n+1}-\theta_n \leq \tau \mid Y_n = i\}}{P\{Y_{n+1} = j \mid Y_n = i\}} \qquad \text{se } \ p_{ij} \neq 0 \end{aligned}$$

quindi

$$G_{ij}(\tau) \ = \ \begin{cases} H_{ij}(\tau)/p_{ij} & \text{se } \ p_{ij} > 0 \\ 0 & \text{se } \ p_{ij} = 0 \end{cases} \qquad \forall i \in S, \forall j \in S \tag{1.156}$$

La sequenza stocastica $\{Y_n,n \geq 0\}$ è una CMTD e viene detta catena di Markov interna del PSM $\{X(t),t \geq 0\}$.

Le probabilità di transizione di tale CMI sono definite come nella (1.124). Si vede subito che

$$r_{ij} \ = \ p_{ij} \qquad \forall i \in S, \forall j \in S \tag{1.157}$$

dove p_{ij} è dato dalla (1.155).

Si osservi che in questo caso non è necessario escludere la possibilità di transizioni dello stato i a se stesso; quindi non deve necessariamente essere $r_{ii} = 0 \ \forall i \in S$.

La classificazione degli stati di un PSM $\{X(t),t \geq 0\}$ è in gran parte basata sulla CMI. Gli stati del PSM sono ricorrenti o transitori a seconda che gli stati della CMI $\{Y_n,n \geq 0\}$ siano ricorrenti o transitori. Inoltre, il PSM è irriducibile se e solo se la sua CMI è irriducibile.

Invece, la periodicità del PSM $\{X(t),t \geq 0\}$ deve essere studiata indipendentemente dalla periodicità della CMI. Uno stato $i \in S$ di un PSM è periodico se l'intervallo di tempo tra due ingressi successivi nello stato i può avvenire solo a multipli interi di un tempo $\delta > 0$. Il massimo valore di δ è il periodo dello stato i. Uno stato può essere aperiodico nel PSM e periodico nella CMI o viceversa.

Supponiamo ora per semplicità che tutti gli sati del PSM $\{X(t),t \geq 0\}$ siano ricorrenti ed aperiodici. Il tempo medio di soggiorno nello stato i è dato da[2]

$$E\,[W_i] \;=\; \int_0^\infty [1 - P\{W_i \leq t\}]\; dt \;=\; \int_0^\infty \;[1 \;-\; \sum_{k \in S} H_{ik}(t)]\; dt \qquad \forall i \in S \tag{1.158}$$

Indichiamo con $\pi_j^{(Y)}$ le probabilità stazionarie della CMI $\{Y_n,n \geq 0\}$, definite come nelle (1.129) e (1.130).

Le probabilità limite del PSM $\{X(t),t \geq 0\}$, definite come nella (1.128), possono essere ottenute con l'espressione

$$\pi_j^{(X)} \;=\; \frac{\pi_j^{(Y)}\; E\,[W_j]}{\sum_{k \in S}\; \pi_k^{(Y)}\; E\,[W_k]} \qquad \forall j \in S \tag{1.159}$$

che è simile alla (1.131).

Ne consegue che la tecnica della catena interna permette il calcolo delle distribuzione di regime per una classe di processi più vasta di quella precedentemente considerata, ovvero di tutti i processi con caratteristica semi-Markoviana.

Il tempo medio di ricorrenza di uno stato j di un PSM, M_j, è definito come il tempo medio che trascorre tra due istanti successivi di ingresso nello stato j. M_j può essere ricavato dall'espressione

$$M_j \;=\; \frac{E\,[W_j]}{\pi_j^{(X)}} \qquad \forall j \in S \tag{1.160}$$

che è un'estensione della (1.85).

Le catene di Markov sono un caso particolare dei processi semi-Markov, che a loro volta sono una sottoclasse dei processi semi-rigenerativi. Questi ultimi sono catene per le quali alcuni istanti di cambio di stato sono dei tempi di rigenerazione del sistema, nei quali cioè viene persa memoria della storia passata del processo. Non ci addentriamo qui nello studio dei processi semi-rigenerativi; ricordiamo solo che molte loro proprietà possono essere ricavate dalla caratterizzazione del tempo che intercorre tra due punti di rigenerazione (tempo di ciclo).

---

[2] La media di una variabile casuale X, con distribuzione di probabilità $F_X(x)$, può essere calcolata come

$$E[X] = \int_0^{+\infty} [1 - F_X(x)]\; dx - \int_{-\infty}^{0} F_X(x)\; dx$$

come è possibile verificare integrando per parti. Per variabili casuali che assumono solo valori positivi

$$E[X] = \int_0^{+\infty} [1 - F_X(x)]\; dx$$

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[CINL75] E. Cinlar, "Introduction to Stochastic Processes", Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1975.

[COXM65] D. R. Cox and H. D. Miller, "The Theory of Stochastic Processes", Chapman and Hall, London, 1965.

[FELL66] W. Feller, "An Introduction to Probability Theory and its Applications", Vol. 2, J. Wiley, New York, NY, 1966.

[HOWA71] R. A. Howard, "Dynamic Probabilistic Systems", Vol. 1 and 2, J. Wiley, New York, NY, 1971.

[KARL75] S. Karlin and H. M.Taylor, "A First Course in Stochastic Processes", Academic Press, New York, NY, 1975.

[KEME60] G. Kemeni and J. L.Snell, "Finite Markov Chains", Van Nostrand, Princeton, NJ, 1960.

[PARZ62] E. Parzen, "Stochastic Processes", Holden Day, San Francisco, CA, 1962.