Logica & Linguaggio: Introduction

RAFFAELLA BERNARDI

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

P.ZZA VENEZIA, ROOM: 2.05, E-MAIL: BERNARDI@DISI.UNITN.IT

Contents

1. Administrativa

Schedule 30 ECTS. 6 hr per week. Mon: 16:00-18:00, Tue and Thu: 12:00-14:00

Period Start 20.02.12, End: 22.03.12

Exam Written exercises (students of philosophy of language could choose to report on an agreed topic.)

Office hours On appointment.

Teaching Material

- Lecture notes: `http://disi.unitn.it/~bernardi/Courses/LoLa/11-12.html`
- Text book: A. Varzi, J. Nolt, D. Rohatyn. Logica. McGraw-Hill, 2007. Ch. 1-6. For students of Philosophy of Language Carlo Penco "Introduzione alla filosofia del linguaggio"

February Logic

March Logic applied to Language

2. What is Logic?

Lewis Carroll “Through the Looking Glass”:

> “Contrariwise”, continued Tweedledee, “if it was so, it might be; and if it were so, it would be; but as it isn’t, it ain’t. That’s logic.”

Question What’s your answer?

“The Game of Logic” by Lewis Carroll:

> seven words -“Propositions, Attribute, Term, Subject, Predicate, Particular, Universal” – charmingly useful, if any friend should happen to ask if you have ever studied Logic. Mind you bring all seven words into your answer, and your friend will go away deeply impressed – ’a sadder and wiser man’.

2.1. Other answers

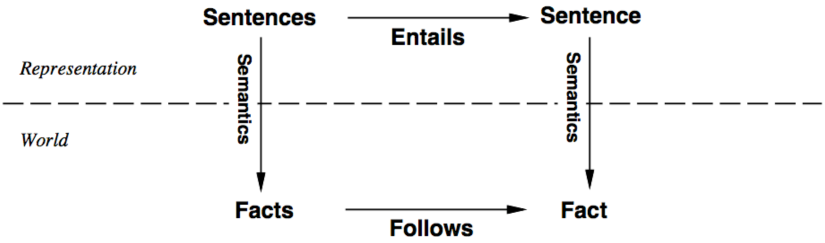
Moshe Vardi's students

- the ability to determine correct answers through a standardized process
- the study of formal inference
- a sequence of verified statements
- reasoning, as opposed to intuition
- the deduction of statements from a set of statements

Wikipedia

> Logic [...] is most often said to be the study of criteria for the evaluation of arguments [..], the task of the logician is: to advance an account of *valid and fallacious inference* to allow one to distinguish logical from flawed arguments.

2.2. Logic in a picture



A logic allows the axiomatization of the domain information, and the drawing of conclusions from that information.

- Syntax
- Semantics
- Logical inference = *reasoning*

2.3. The main concern

Modern Logic teaches us that one claim is a *logical consequence* of another if

> there is no way the latter could be *true* without the former also being true.

It is also used to *disconfirm* a theory

> if a particular claim is a logical consequence of a theory, and we discover that the claim is *false*, then we know the theory itself must be incorrect in some way or another.

Examples of theories: physical theory; economic theory, etc.

Our main concern in this course introduce the main aspects to solve a given problem with a logic approach.

2.4. Logic as "science of reasoning"

- Goal of logic: to make sure that from a set of **premises** it is possible to derive a *correct consequent*

```
If there is no electricity, the light is not on.
The light is on or the candle is on.
There is no electricity.
===========================================
The candle is on
```

```
premise_1
   ...
premise_n
============
conclusion
```

Notation: $\underbrace{\text{Premise}_1, \ldots, \text{Premise}_n}_{\textit{antecedent}} \models \underbrace{\text{conclusion}}_{\textit{consequent}}$

2.5. Counter-example

A counterexample is an exception to a proposed general rule. For example, consider the proposition

“all students are lazy”.

Because this statement makes the claim that a certain property (laziness) holds for all students, even a single example of a diligent student will prove it false. Thus, any hard-working student is a counterexample to “all students are lazy”.

Counterexamples are often used to prove the boundaries of possible theorems. By using counterexamples to show that certain conjectures are false.

3. Important Questions in Logic

- **Expressive Power** of representation language

$\rightsquigarrow$ able to *represent* the problem

- **Correctness** of entailment procedure

$\rightsquigarrow$ *no false* conclusions are drawn

- **Completeness** of entailment procedure

$\rightsquigarrow$ *all correct* conclusions are drawn

- **Decidability** of entailment problem

$\rightsquigarrow$ there exists a (terminating) algorithm to compute entailment

- **Complexity**

$\rightsquigarrow$ resources needed for computing the solution

3.1. Correctness (Soundness) and Completeness

1. Assume my system has to check whether a mushroom is "poisonous":

    - For all mushroom x if x is poisonous, it's recognized by the system. [Complete System]
    - For all mushroom x recognized by the system, x is poisonous. [Sound System]

    Incomplete An incomplete system could miss to recognize as "poisonous" mushrooms that are poisonous. Consequence: I die.

    Unsound An unsound system could happen to recognize as "poisonous" mushrooms that are not poisonous. Consequence: I eat one mushroom less, than I could.

    Hence, soundness is important, but Completness is vital!

2. Assume my system has to check whether a mushroom is “eatable”.

   Incomplete An incomplete system could miss to recognize as “eatable” mushrooms that are eatable. I eat one mushroom less, than I could.

   Unsound An unsound system could happen to recognize as “eatable” mushrooms that are not eatable. Consequence: I die.

   Hence, completness is important, but Soundness is vital!

4. What is a Logic?

Clearly distinguish the definitions of:

- the *formal language*
  - Syntax
  - Semantics
  - Expressive Power
- the *reasoning problem* (e.g., entailment)
  - Decidability
  - Computational Complexity
- the *problem solving procedure*
  - Soundness and Completeness
  - Complexity

4.1. The ideal Logic

- Expressive
- With decidable reasoning problems
- With sound and complete reasoning procedures
- With efficient reasoning procedures

4.2. Many Logics

- Propositional Logic
- First Order Logic
- Modal Logic
- Temporal Logic
- Relevant Logic
- ...

4.3. Types of Logics

- Logics are characterized by what they commit to as "primitives"
- Ontological commitment: what exists—facts? objects? time? beliefs?
- Epistemological commitment: what states of knowledge?

Language	Ontological Commitment (What exists in the world)	Epistemological Commitment (What an agent believes about facts)
Propositional logic	facts	true/false/unknown
First-order logic	facts, objects, relations	true/false/unknown
Temporal logic	facts, objects, relations, times	true/false/unknown
Probability theory	facts	degree of belief $0 \ldots 1$
Fuzzy logic	degree of truth	degree of belief $0 \ldots 1$

5. Background

1. Insiemi ?

2. Funzioni ?

5.1. Insiemi: Nozioni base

Elemento Il fatto che x è un elemento dell'insieme A si indica con la scrittura $x \in A$.

Gli elementi possono a loro volta essere insiemi, come ad esempio nell'insieme $A = \{1,2,\{3,4\}\}$ che ha come elementi i numeri 1 e 2 e l'insieme $\{3,4\}$.

Sottoinsieme l'insieme B è un sottoinsieme dell'insieme A se tutti gli elementi presenti in B sono anche presenti in A.

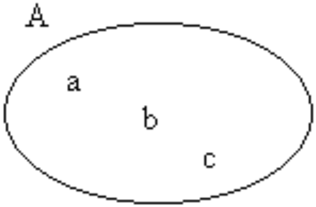
Nel caso in cui tutti gli elementi di A appartengono anche a B si parla di sottoinsieme improprio (simbolo: $B \subseteq A$). Si parla di sottoinsieme proprio se almeno un elemento di A non è compreso nell'insieme B (simbolo: $B \subset A$).

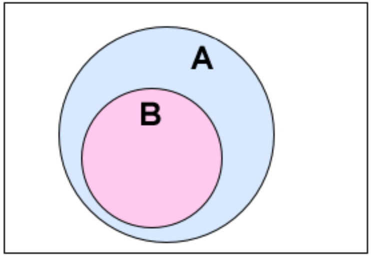
Inclusione di elemento vs. sottoinsieme L'inclusione di un insieme B in A come sottoinsieme non va confusa con l'inclusione di B in A come elemento.

Nell'esempio considerato prima $B = \{1,2\}$ è sottoinsieme di A ($\{1,2\} \subset \{1,2,\{3,4\}\}$ ma non elemento ($\{1,2\} \notin \{1,2,\{3,4\}\}$ mentre $\{3,4\}$ è elemento di A ($\{3,4\} \in \{1,2,\{3,4\}\}$ ma non sottoinsieme $\{3,4\} \not\subset \{1,2,\{3,4\}\}$.

Insieme Vuoto Tra i sottoinsiemi è sempre presente l'insieme vuoto $\{\}$ o $\emptyset$.

5.2. Insiemi: Diagrammi Venn





Dicitura alternativa per $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$$A = \{x | x \text{ un numero reale positivo minore di } 7\}$$

si legge: l'insieme di tutti gli x tali che x è un numero reale positivo minore di 7.

5.3. Insiemi: Operazioni

Unione l'unione ($\cup$) di due insiemi A e B è data dall'insieme formato da tutti gli elementi che appartengono all'insieme A o all'insieme B o a entrambi. $A \cup B =_{def} \{x | x \in A \text{ o } x \in B\}$

Esempio: $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{2,3,4\}$. In questo caso si ottiene l'unione prendendo tutti gli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi: $A \cup B = \{1,2,3,4\}$.

Intersezione l'intersezione di due insiemi A e B è data dall'insieme formato da tutti gli elementi che appartengono sia all'insieme A che all'insieme B contemporaneamente. $A \cap B =_{def} \{x | x \in A \text{ e } x \in B\}$

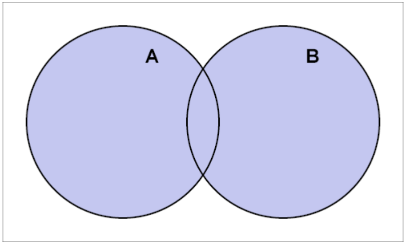
Esempio: $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{2,3,4\}$. In questo caso si può verificare direttamente per ogni elemento di A se è anche elemento di B (o viceversa), ottenendo $A \cap B = \{2,3\}$.

Differenza Avendo due insiemi A e B, il complemento di A rispetto a B è formato dai soli elementi di B che non appartengono ad A. Esso si indica solitamente come $B \setminus A$ oppure come $B - A$. Formalmente abbiamo: $B \setminus A =_{def} B - A = \{x \in B \text{ e } x \notin A\}$

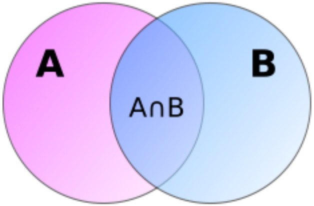
Esempio: $\{1,2,3,4,5\} \setminus \{3\} = \{1,2,4,5\}$

Prodotto Cartesiano il prodotto cartesiano di due insiemi A e B è l'insieme delle coppie ordinate (a,b) con a in A e b in B. Formalmente: $A \times B =_{def} \{(a,b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$.

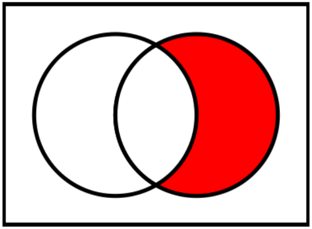
5.4. Insiemi: Operazioni Venn



Unione



Intersezione

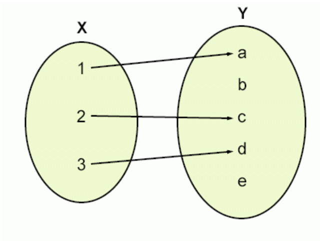


Differenza

Come raffigurereste due insieme disgiunti? Qual è il risultato della loro intersezione?

5.5. Funzioni

Una funzione f è un operatore che assegna ad ogni elemento x appartenente all'insieme X uno ed un solo elemento y appartenente all'insieme Y. $f : X \to Y$



- X è il dominio di f e Y il codominio.
- x è l'argomento della funzione mentre y o $f(x)$ è il valore ad esso assegnato.

5.6. Funzioni a più argomenti

Quando il dominio di una funzione f è il prodotto cartesiano di due o più insiemi e dunque la funzione agisce su coppie (o terne o n-uple) di elementi di insiemi allora il valore di una coppia (x,y) viene indicata con la notazione $f(x,y)$. In questo caso la funzione viene anche chiamata funzione di due (o più) argomenti.

Esempio: si consideri la funzione di moltiplicazione che associa due numeri naturali al loro prodotto: $f(x,y) = x \times y$ (oppure $\times(x,y)$.) Questa funzione può essere definita formalmente come avente per dominio $N \times N$, l'insieme di tutte le coppie di numeri naturali. Nota:

$$f : X \times Y \to Z \text{ è equivalente a } f : X \to (Y \to Z)$$

6. Nozioni principali

Significato Il significato di un'espressione è il suo valore di verità (vero o falso).

Principio di Composizionalità Il significato (quindi l'esser vero o falso) di una frase complessa dipende dal significato (verità o falsità) delle frasi di cui essa è composta.

Ragionamento $\text{Premessa}_1, \ldots, \text{Premessa}_n \models$ conclusione sse la conclusione è vera in tutte le situazioni in cui tutte le premesse sono vere.

6.1. Significato: Funzione di valutazione

Una funzione di valutazione assegna ad una frase il suo significato. In altre parole, una funzione di valutazione assegna ad una formula il suo valore di verità.

$$\underbrace{\text{La primavera inizia il 21 Marzo}}_{p}$$

Consideriamo due situazioni, in una siamo nell'emisfero nord nell'altra siamo nell'emisfero sud.

Emisfero Nord: p è vera

Emisfero Sud: p è falsa

La funzione V_1 (dell'emisfero nord) $V_1(p) = vero$ vs. la funzione V_2 (dell'emisfero sud) $V_2(p) = falso$

$$V_i : \{p, q, \ldots\} \to \{vero, falso\}$$

6.2. Composizionalità: Connettivi vero-funzionali

1. $\underbrace{\text{La primavera inizia il 21 Marzo}}_{p}$ `Vero`
2. $\underbrace{\text{Nel 2012 Pasqua sarà in Giugno}}_{q}$ `Falso`
3. La primavera inizia il 21 Marzo e nel 2012 Pasqua sarà in Giugno `Falso`
4. Nel 2012 Pasqua non sarà in Giugno `Vero`
5. Nel 2012 Pasqua sarà in Giugno perchè la primavera inizia il 21 Marzo.

- (p e q) è vero sse p è vero e q è vero. V(p e q)=vero sse V(p)=vero e V(q)=vero.
- (non q) è vero sse q è falso. V(non q)=vero sse V(q)=falso.
- (q perchè p) non dipende dalla verità/falsità di p e q.

"e" è un connettivo vero-funzionale: La verità della frase composta con esso (p e q) dipende unicamente dalla verità delle frasi che esso connette. Lo stesso vale per "non". Mentre ciò non vale per "perchè".

6.3. Ragionamento

$$\underbrace{\{P_1 \ldots P_n\}}_{\text{Premesse}} \models \alpha$$

L'insieme delle premesse *implica* la frase α sse

α è vera in tutte le situazioni (per tutte le funzioni di valutazione) in cui tutte le premesse sono vere.

Indichiamo l'insieme delle situazioni in cui α è vera $W(\alpha)$, abbiamo

$$W(\text{Premesse}) \subseteq W(\alpha)$$

l'insieme delle interpretazioni in cui tutte le premesse sono vere è un sottoinsieme dell'insieme delle interprezioni in cui α è vera.

7. Perchè Logica e Linguaggio?

- Capire il linguaggio naturale: la sua sintassi, semantica, il collegamento tra sintassi e semantica.
- Usare la rappresentazione logica per verificare automaticamente le inferenze (sistemi di dimostrazione)
- Usare la rappresentazione logica e i sistemi di dimostrazione per verificare se in un testo ci sono contraddizioni.
- Usare la rappresentazione logica e i sistemi di dimostrazione come supporto a sistemi di Question Answering per trovare risposte alle domande degli utenti
- ...

8. Agenda del corso

Teoria più esercizi su:

1. Parte I: Logica
    - Logica Proposizionale (20, 23, 27)
    - Logica di Primo Ordine (28, 01, 05)
    - Tableaux per PL e FOL (da decidere se includere)
2. Parte II: Logica & Linguaggio
    - Grammatica Categoriale, Calcolo di Lambda, Grammatica di Montague (6, 8, 13, 20)
    - Lo & La a Trento, piú prova dell'esame e discussione dei risultati (22, 26, 27)

22 Marzo: ci sarà un cambio d'orario.

Ogni parte si concluderà con una breve panoramica storica delle idee presentate; sarà dato un saggio classico da leggere.

9. Obiettivi formativi

Imparerete a:

- formalizzare un problema in PL e FOL
- ad usare strumenti di ragionamento (tavole di verità) per dimostrare in PL che una frase è una conseguenza logica di altre (o no).
- familiarizzare con l'approccio logico al linguaggio naturale.

Modulo da compilare e consegnare.